

В.Л. МАКАРОВ
А.М. РУБИНОВ

Математическая
теория
экономической
динамики
и равновесия



В. Л. МАКАРОВ,
А. М. РУБИНОВ

Математическая теория
экономической динамики
и равновесия



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

Математическая теория экономической динамики и равновесия. В. Л. Макаров, А. М. Рубинов (Серия «Экономико-математическая библиотека»). Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1973.

С помощью моделей экономической динамики изучают поведение экономической системы во времени. В книге подробно исследуется одна из основных технологических моделей динамики — модель Неймана — Гейла, а также некоторые ее обобщения. Особое внимание уделено оптимальным (эффективным) траекториям. В частности, изложены теоремы о магистрали, посвященные асимптотике этих траекторий, и теоремы о характеристике (о наличии двойственных оценок). Дается полное описание состояний равновесия модели Неймана — Гейла.

В книге исследуется также основная модель экономического равновесия — модель Эрроу — Дебре. Приводятся ее обобщения, которые используются затем для анализа динамических моделей, учитывающих потребление в явном виде. Подробно изложена теория точно-множественных отображений, служащая аппаратом для исследования моделей.

Книга рассчитана на математиков: студентов, аспирантов, научных работников, интересующихся математической экономикой, математическим программированием и выпуклым анализом, а также на экономистов, знающих математику.

В монографии 27 рис., библи. 120 названий.

© Издательство «Наука», 1973.

М $\frac{0224 - 1839}{042(02)-73}$ 73-73

Список обозначений	6
Предисловие	7
Введение	9

Г Л А В А I

ТОЧЕЧНО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

§ 1. Предварительные сведения	19
---	----

1. Выпуклые множества, конусы, аффинные многообразия (19). 2. Гиперплоскости. Отделимость (19). 3. Алгебраические операции над выпуклыми множествами (22). 4. Выпуклые конусы и сопряженные им (23). 5. Отношение предпорядка, порожденное конусом (24). 6. Выпуклая и коническая оболочка (25). 7. Многогранные конусы (26). 8. Выпуклые функции (27). 9. Полунепрерывные функции (28).

§ 2. Суперлинейные функционалы и выпуклые множества	30
---	----

1. Суперлинейные функционалы (30). 2. Примеры (32). 3. Опорные линейные функционалы (34). 4. К-опорные множества (35). 5. Функционалы, опорные в точке (39). 6. Функционалы, определенные на всем пространстве (41). 7. Сублинейные функционалы (41). 8. Монотонные сублинейные функционалы (42). 9. Нормальные множества (44). 10. Свойства монотонных сублинейных функционалов (47). 11. Полулинейные пространства выпуклых множеств (49). 12. Монотонные нормы (52). 13. Нормальные множества и грани конуса (55).

§ 3. Элементы топологической теории точечно-множественных отображений	58
---	----

1. Точечно-множественные отображения (58). 2. Замкнутые отображения (60). 3. Теорема Какутани (64). 4. Полунепрерывные снизу и непрерывные (по Какутани) отображения (64). 5. Метрика Хаусдорфа (66). 6. Непрерывность по Хаусдорфу (69).

§ 4. Суперлинейные отображения и двойственные к ним	71
---	----

1. Простейшие свойства точечно-множественных отображений, определенных на конусе (71). 2. Монотонные отображения (75). 3. Свойства произведения отображений (77). 4. Суперлинейные отображения (77). 5. Двойственные отображения (82). 6. Второе двойственное отображение и нормальная оболочка (87). 7. Суперлинейные отображения и выпукло-вогнутые положительно однородные функционалы (89). 8. Примеры (91).

Г Л А В А II

МОДЕЛЬ НЕЙМАНА — ГЕЙЛА

§ 5. Построение модели Неймана — Гейла	94
--	----

1. Определение модели Неймана — Гейла (94). 2. Теорема о канонической форме (99).

§ 6. Темпы роста модели Неймана — Гейла	105
---	-----

1. Состояния равновесия и темпы роста. Неймановский темп роста (105). 2. Примеры (109). 3. Неймановское состояние равновесия

(114). 4. Расположение состояний равновесия модели Неймана — Гейла. Конечность числа темпов роста модели (118). 5. Обобщенные темпы роста (124). 6. Экономический темп роста (125).

§ 7. Спектральная теория суперлинейных отображений 126

1. Собственные числа и собственные множества (126). 2. Собственные числа отображения a на Π_n^c (127). 3. Собственные числа отображения a на Π_n^b (132). 4. Собственные множества, отвечающие темпам роста (135). 5. Собственные числа отображения a^{-1} (138).

Г Л А В А III

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКА

§ 8. Общая технологическая модель экономической динамики 141

1. Введение (141). 2. Определение модели. Траектории (141). 3. Дискретные модели (146). 4. Подмодели (148). 5. Оптимальные траектории в моделях первого рода (150). 6. Правильные модели (157). 7. Оптимальные траектории в моделях второго рода (158).

§ 9. Характеристика оптимальных траекторий 160

1. Двойственная модель (160). 2. ϵ -характеристика слабо оптимальных траекторий (162). 3. Траектории, допускающие характеристику (163). 4. Теоремы о характеристике в моделях первого рода (165). 5. Характеристика траекторий модели второго рода (170). 6. Согласованные траектории (175).

§ 10. Характеристика оптимальных траекторий в некоторых конкретных моделях 179

1. Модель Неймана — Гейла (179). 2. R_+^n -оптимальные траектории (182). 3. Правильная модель Неймана — Гейла (184). 4. Модель типа Неймана — Гейла (185). 5. Модель, функционирующая в непрерывном времени (185).

§ 11. Обобщенная технологическая модель 192

1. Определение модели. Оптимальные траектории (192). 2. Принцип оптимальности (194). 3. Суперлинейное расширение (198). 4. Характеристика оптимальных траекторий (203). 5. Некоторые обобщения (205).

§ 12. Характеристика траекторий бесконечномерных моделей 211

1. Введение (211). 2. Суперлинейные функционалы и K -опорные множества; вполне положительные сублинейные функционалы и нормальные множества (211). 3. Точно-множественные отображения (213). 4. Определенные регулярной модели. Теоремы о характеристике (219). 5. Модель, учитывающая различие фондов по сроку службы (221).

Г Л А В А IV

АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

§ 13. Теорема о магистрали в слабой форме 225

1. Введение (225). 2. Траектории, имеющие средний темп роста α (226). 3. Асимптотика траекторий, имеющих средний темп роста α (227). 4. Асимптотика оптимальных конечных траекторий (232). 5. Асимптотика при наличии строгого состояния равновесия (234). 6. Асимптотика траекторий в произвольных моделях Неймана — Гейла (238).

§ 14. Теорема о магистрали в сильной форме	239
1. Положительная граница нормального множества (239). 2. Формулировка теоремы о магистрали в сильной форме. Леммы (242). 3. Доказательство теоремы 14.1 (245). 4. Некоторые замечания (248). 5. Теорема Никайдо (250).	
§ 15. Теорема о магистрали в сильнейшей форме	255
1. Вспомогательные предложения (255). 2. Теорема о магистрали в сильнейшей форме (261).	
§ 16. Асимптотика траекторий общей технологической модели	263
1. Асимптотика траекторий, допускающих согласование (263). 2. Приложение полученных результатов к модели Неймана — Гейна (269).	

ГЛАВА V

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

§ 17. Игры n лиц	274
1. Определение игры (274). 2. Вспомогательные предложения (276). 3. Существование состояния равновесия (278).	
§ 18. Модели экономического равновесия на конечном временном интервале	280
1. Модель Эрроу — Дебре (280). 2. Существование равновесия (283). 3. Замечания об экономическом смысле теоремы 18.1 (285).	
§ 19. Конкурентное равновесие и оптимальность	286
1. Видоизменение первоначальной модели (286). 2. Оптимальность состояния равновесия (289). 3. Замечание к теореме 19.1 (291).	

ГЛАВА VI

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ПОТРЕБЛЕНИЯ В ЯВНОМ ВИДЕ

§ 20. Определение общей модели экономической динамики Связь с технологическими моделями	293
1. Определение модели; оптимальные траектории (293). 2. Существование U -оптимальных траекторий (295). 3. Характеристика U -оптимальных траекторий (300). 4. Необходимые и достаточные условия U -оптимальности (304).	
§ 21. Магистрали	306
1. Введение (306). 2. Магистрали для случая $\mu = 1$ (307). 3. Магистрали для случая $\mu > 1$ (310).	
§ 22. Экономическое равновесие на бесконечном временном интервале и U -оптимальные траектории	314
1. Введение (314). 2. Модель M_∞ (315). 3. Существование состояния равновесия (316). 4. Связь между равновесными, эффективными и U -оптимальными траекториями (320).	
§ 23. Исторические и литературные комментарии	323
Литература	329

\bar{a} 61	Z' 82
a^{-1} 59	\bar{Z}_α 231
a' 82	\mathfrak{M}^x 148
a'' 87	\mathfrak{M}' 160
$a(\xi)$ 58	\mathfrak{M}_e 147
$a_2 \circ a_1$ 59	\mathfrak{M}_T 158
a^i 59	\mathfrak{M}_Z 179
$\ a\ $ 78	$\hat{\mathfrak{M}}$ 203
\hat{a} 198	(\mathfrak{M}, U) 295
A_n 127	\mathfrak{N}_Z 184
$A(K_1, K_2)$ 78	$\mathfrak{X}^a(\xi)$ 242
$A_u(K_1, K_2)$ 216	$\mathfrak{X}_T^a(\xi)$ 241
$A_v(K_1, K_2)$ 216	$\alpha(\sigma)$ 105
$B(K_1, K_2)$ 198	$\alpha(x, y)$ 107
$\text{co}\Omega$ 25	$\alpha(Z)$ 108
$\text{Co}\Omega$ 26	$\gamma(c)$ 294
$\partial^+\xi$ 239	$\Gamma(\Omega)$ 56
\tilde{E} 141	Γ_t^x 148
$\text{int}\Omega$ 20	(Λ) 195
K^* 23	η_σ 135
L_t^x 148	η_σ 138
M_∞ 315	π_α 226, 238
na 79	$\Pi(\Omega)$ 58
n_0a 215	$\tilde{\Pi}(\Omega)$ 66
$n\Omega$ 47	$\Pi Q(K)$ 36
$n\mathfrak{M}$ 161	$\Pi P(K)$ 42
$\bar{n}\Omega$ 57	$\Pi P^m(K)$ 49
N_α 228	Π_n^c 127
$P(K)$ 41	Π_n^b 127
$P^m(K)$ 49	$\Pi\sigma$ 135
$P_{\mathfrak{M}}$ 143	$\Pi\sigma$ 138
$\text{Pr}_i Z$ 59	χ_T 158
$Q(K)$ 31	$\bar{\Omega}$ 22
$\text{ri}\Omega$ 20	\geq 24
R^n 32	\gg, \ggg 32
R_+^n 32	$\ \cdot\ _\Omega$ 55
U_q 34	\langle, \rangle 25
$(U_q)^x$ 39	
U_p^+ 42	
$(U_p^+)^x$ 53	

Настоящая книга посвящена математическому анализу моделей экономической динамики и равновесия. Эти модели представляют собой важный раздел математической экономики.

Модели экономической динамики описывают поведение экономической системы во времени. Основным объектом изучения в этих моделях является траектория, т. е. последовательность элементов фазового пространства, которая описывает допустимый (возможный) путь развития экономики. Среди всех траекторий выделяются «желательные», т. е. оптимальные в смысле некоторого критерия.

С помощью моделей экономического равновесия изучаются траектории, порождаемые тем или иным экономическим механизмом.

Удобным математическим аппаратом для исследования моделей являются точечно-множественные отображения. При изучении моделей равновесия (так же, как и в теории игр) используется топологический аспект теории этих отображений (в частности, теорема Какутани). Для исследования моделей динамики потребовалось рассмотреть специальный класс отображений, которые в этой книге названы суперлинейными. Теория суперлинейных точечно-множественных отображений представляет, по-видимому, и самостоятельный интерес. Эта теория излагается в первой главе.

Главы II — IV посвящены моделям экономической динамики. Подробно изучены свойства оптимальных траекторий этих моделей. Эти свойства описываются теоремами о характеристике (наличии двойственных оценок) и теоремами о магистрали (об асимптотике траекторий).

В главе V формулируются и исследуются модели равновесия. Основное внимание уделено теореме о существовании состояния равновесия в модели Эрроу — Дебре и некоторых ее обобщениях.

Наконец, в главе VI результаты, полученные ранее, применяются для исследования модели экономической динамики, в которой явно учтено потребление. Исследуются асимптотика и характеристика оптимальных траекторий и указывается связь этих траекторий с так называемыми равновесными траекториями.

Некоторые разделы книги были прочитаны нами на спецкурсах в Новосибирском государственном университете.

При написании книги мы ориентировались на читателя, владеющего некоторой математической культурой и хорошо знающего теорию конечномерных пространств, точнее говоря, конечномерный линейный анализ. Заметим, впрочем, что глубокие результаты теории линейных операторов (матриц) в книге, как правило, не используются. Необходимые для понимания книги и не общеизвестные сведения из конечномерного выпуклого анализа изложены без доказательств в § 1. При изложении некоторых вопросов не удалось обойтись без привлечения сведений из функционального анализа. Соответствующие места в книге набраны петитом.

В книге принята автономная нумерация формул, теорем, предложений и лемм. Они нумеруются с помощью двойного индекса, первая часть которого указывает номер параграфа, а вторая — номер формулы или соответствующего утверждения в этом параграфе.

Многие результаты, вошедшие в эту книгу, неоднократно обсуждались на семинаре по математической экономике Института математики СО АН СССР. Эти обсуждения во многом способствовали улучшению книги. Мы признательны всем участникам этого семинара.

Мы глубоко благодарны Л. В. Канторовичу за постоянную помощь и внимание к нашей работе.

Авторы

1. Место в разделах прикладной математики. В последние два десятилетия бурно развивается математический аппарат для изучения экономических и общественных явлений. Линейное и нелинейное (и вообще математическое) программирование, теория игр, теория графов, теория процессов оптимального управления, моделирование и «симулирование» на ЭВМ и др. сформировались за эти два десятилетия в самостоятельные крупные разделы прикладной математики. По каждому из них в настоящее время насчитывается по несколько монографий, учебников и справочников, сотни научных статей. Таким образом, можно говорить об определенной оформленности и зрелости этих разделов.

Развитие упомянутых направлений, кроме собственной проблематики, порожденной экономическими и другими общественными приложениями, привело к созданию особой, чисто математической проблематики, либо оживило некоторые традиционные области математики.

Упомянем в связи с этим теорию выпуклых множеств и функций, которая в последние годы усиленно развивается именно в связи с потребностями этих новых областей прикладной математики.

Настоящая книга полностью лежит в русле исследований общественных явлений математическими средствами. Однако она не может быть причислена без натяжки ни к одному из упоминавшихся разделов. Дело в том, что математический анализ моделей экономики требует привлечения результатов и из математического программирования, и из теории игр, и из выпуклого анализа и т. д. Кроме того, возникла собственная математическая проблематика и круг понятий, обладающие известной обособленностью.

Имеется ряд книг, в основном экономического характера, посвященных изучению и анализу математических моделей экономики. Содержание этих книг объединено

предметом исследования — моделью экономики, применяемый же аппарат, как правило, самый разнообразный. Причем это разнообразие аппарата по существу и его не избежать.

Существует, однако, один весьма важный класс моделей экономики — модели экономической динамики и равновесия, для которого к настоящему времени разработана довольно стройная математическая теория.

Исследования, связанные с моделями экономической динамики, в последние годы бурно развиваются, и, на наш взгляд, назрела потребность в систематизации накопленных результатов и публикации на эту тему книги чисто математического характера. В последнее время вышло несколько переводных книг (М. Моришима, Устойчивость, равновесие, рост, «Наука», 1972; К. Ланкастер, Математическая экономика, «Сов. радио», 1972; Х. Никайдо, Выпуклые структуры и математическая экономика, «Мир», 1972), в значительной мере затрагивающие проблемы, которым посвящена настоящая книга. Все перечисленные книги носят более элементарный характер, и предварительное ознакомление с ними перед чтением данной будет несомненно полезным.

Прежде чем перейти к изложению содержания книги, нам хотелось посвятить несколько страниц рассмотрению исходных предпосылок и идей при изучении экономических систем в целом, при построении математической теории экономических процессов. Полезно также сказать несколько слов о логике появления тех или иных понятий математической экономики, которые подробно изучаются в книге.

2. Концепция оптимальной экономики. Как известно, предметом экономической науки является производство, распределение и потребление благ (блага понимаются в самом широком смысле).

В этих трех взаимозависимых сторонах экономического процесса основную роль играет распределение — механизм распределения произведенных благ между членами общества. Механизм распределения решающим образом влияет как на производство, так и на потребление благ. В настоящее время дело обстоит таким образом, что сколько-нибудь адекватная (количественная) математическая теория экономики в совокупности всех ее трех сторон

в обычном традиционном понимании теории вряд ли возможна. Экономическая система, по-видимому, имеет сложность, превышающую порог, до которого строится точная теория как математическое понятие. Слишком велик набор существенных факторов, приводящий модель в громоздкую, необозримую конструкцию, с которой невозможно работать по крайней мере в теоретическом плане.

Некоторое время назад возникла идея рассмотреть экономику без учета основной ее стороны — механизма распределения. Эта на первый взгляд парадоксальная идея привела к богатой *математической теории оптимальной экономики* (или экономики благосостояния по западной терминологии). Модели развития экономической системы во времени в рамках этой теории получили название *моделей оптимального экономического роста*. Название возникло из первоначальной цели построения таких моделей — определить максимально возможный темп роста системы в условиях существования ограничений только природного характера (технология, природные запасы, физические законы и т. п.) и совершенно без учета ограничений, связанных с организацией, управлением, «человеческим фактором».

Суть подхода к построению оптимальной (или идеальной) модели экономики близка к подходу великих утопистов прошлого. А именно, конструируется идеальная, с точки зрения создателя, экономика, причем любые вопросы ее реальной осуществимости оставляются в стороне.

Таким образом, основная предпосылка состоит, грубо говоря, в допущении «всемогущества реализации решений». Эта основная предпосылка может быть развернута в более частные:

1) Абсолютная доступность любого характера информации, причем, конечно, информации совершенно достоверной. Имеется в виду, в частности, информация о производственных возможностях, технических достижениях любой ячейки, информация о желаниях, целях людей, особенно в области потребления благ и т. п.

2) Абсолютное могущество в вычислениях, возможность найти решение экстремальной задачи любой размерности.

3) Абсолютное могущество в осуществлении решений, в частности, по конструированию экономической организации.

4) Постулат о существовании и знании глобального критерия оптимальности, т. е. критерия, которым руководствуется все общество как единое целое.

В соответствии с этими предпосылками, формулируется (или мыслится) экстремальная задача гигантских размеров. Типы экстремальных задач, которые при этом появляются, довольно сильно отличаются друг от друга. Чуть ниже в этом введении формулируется одна из таких задач — задача нахождения оптимальной траектории развития экономики на бесконечном временном интервале.

Решение соответствующей экстремальной задачи, называемое *оптимальным состоянием экономики*, или, в динамической постановке, *оптимальной траекторией*, является, по определению, самым лучшим для всего общества в целом в рамках имеющейся физической реальности. Еще раз подчеркиваем, что вопросы фактической реализации оптимального решения в этой теории остаются в стороне.

Основные предпосылки теории оптимальной экономики кажутся настолько далекими от реальности, что на первый взгляд она имеет чисто умозрительный интерес. На самом же деле это далеко не так. Во-первых, существуют частные экономические ситуации, совершенно реальные, где перечисленные выше предпосылки имеют место (например, процесс планирования, особенно внутриотраслевое планирование). Во-вторых, сам постулат о существовании оптимальной (мифической с точки зрения реальности) траектории развития экономики оказывается полезным при принятии практических решений. С идеальной организацией, точнее, с ее характеристическими признаками, можно сравнивать любые другие.

Математическая теория оптимальных состояний и траекторий продвинута в настоящее время достаточно далеко. Этому посвящена большая часть книги.

3. Экономическое равновесие. В теории оптимальной экономики всегда наибольшую критику вызывал постулат о *глобальном критерии оптимальности* и, как следствие, полной централизации. Даже если допустить постулат о существовании в принципе такого глобального критерия, не существует органа в экономической системе или группы людей, носителя этого критерия. Каждая часть системы является носителем некоторого своего критерия, своей ло-

кальной цели. Глобальный критерий — это какой-то синтез локальных критериев, но локальные, если так можно выразиться, существуют более реально, более осязательно.

Модели экономического равновесия как в статике, так и в динамике отличаются от моделей оптимальной экономики только в одном пункте. Вместо единого критерия и, стало быть, экстремальной задачи имеется совокупность частей, каждая со своим критерием. Математически эта ситуация описывается подобно игре многих лиц, а понятие экономического равновесия в статике совпадает с понятием равновесия или решения игры в смысле Неймана — Нэша. Существенно отметить, что сами множества стратегий некоторых частей зависят от выбора стратегий другими частями. Эта зависимость задается с помощью некоторой матрицы, называемой *матрицей распределения доходов*. Элементы этой матрицы показывают, какую долю дохода одна часть направляет другой части. Понятие равновесной траектории в модели экономической динамики представляет собой несколько более сложную конструкцию, но в конечном счете в идейном плане близко к решению в смысле Неймана — Нэша.

Основной результат в теории экономического равновесия, имеющий фундаментальное значение для экономической теории вообще, содержится в так называемой *теореме эквивалентности*.

4. **Пример модели экономической динамики.** Хорошее представление о содержании настоящей книги, проблематике и результатах в области теории моделей экономической динамики и равновесия можно дать на примере простейшей (так называемой *однопродуктовой*) модели экономической динамики. Эта модель, кстати, систематически используется в качестве иллюстративного примера в основном изложении (гл. V, VI).

Однопродуктовая модель задается с помощью двух неотрицательных функций f и u , определенных на неотрицательной полуоси R_+ . Функция f называется *производственной*, число $f(x)$ показывает количество продукта (капитала), которое можно произвести в течение единичного временного интервала, располагая продуктом (капиталом) в количестве x . Функция u называется *функцией полезности* или *предпочтения*, число $u(c)$ показывает величину «полезности» от потребления продукта в количестве c в тече-

ние единичного временного интервала. Основным предметом изучения в теории моделей экономической динамики являются (допустимые) траектории развития системы, т. е. в данном примере такие последовательности пар чисел $(x_t, c_t)_{t=0}^{\infty}$, $x_t \geq 0$, $c_t \geq 0$, для которых выполнено соотношение $x_{t+1} + c_{t+1} = f(x_t)$ при всех t .

Привлекая экономическую интерпретацию, можно говорить, что x_t это количество продукта (фондов или капитала), имеющееся в системе в начале периода t , c_t — количество продукта, идущее на потребление в течение временного интервала t .

Поскольку, как правило, из экономических соображений интересно знать, какова «полезность» от траектории $(c_t)_{t=0}^{\infty}$, то вместо траектории (x_t, c_t) часто рассматривают траекторию $(x_t, \gamma_t)_{t=0}^{\infty}$, где $\gamma_t = \sum_{\tau=0}^t u(c_{\tau}) \cdot \lambda_{\tau}$, $\lambda_{\tau} \geq 0$, $t = 1, 2, \dots$ Числа λ_{τ} называются *коэффициентами приведения* или *дисконтирования* полезности во времени.

Рассмотрим теперь кратко проблематику и результаты, изложенные в книге, применительно к рассматриваемому примеру.

Точечно-множественные отображения. Нетрудно заметить, что состояние (x_t, γ_t) полностью определяет множество возможных, согласно определению допустимой траектории, состояний $\{(x_{t+1}, \gamma_{t+1})\}$ для следующего временного интервала. Точечно-множественные отображения типа

$$a: (x_t, \gamma_t) \rightarrow \{(x_{t+1}, \gamma_{t+1})\}$$

являются самостоятельным предметом изучения теории. Такое изучение необходимо для детального исследования свойств траекторий развития, кроме того, оно представляет самостоятельный, чисто математический, интерес. В частности, при этом обобщается ряд результатов из теории положительных линейных операторов, например теоремы о спектральных свойствах. В классической экономической теории функции f и u предполагаются вогнутыми (выпуклыми вверх). Это предположение о выпуклости многократно обсуждалось в самой различной литературе, поэтому мы не будем здесь повторять общеизвестные аргументы на этот счет. Отметим лишь, что оно оказывается решаю-

щим для большинства результатов книги. В частности, упомянутые выше отображения a в условиях предположения выпуклости исчерпывающим образом изучаются в теории вогнутых и суперлинейных отображений, излагаемой в первых главах.

Множество, которое пробегает временной параметр t , не обязательно должно быть натуральным рядом. Часть результатов относится к случаю, когда t пробегает произвольное линейно упорядоченное множество.

Оптимальные траектории. Поскольку (x_{t+1}, γ_{t+1}) определяется не единственным образом по (x_t, γ_t) , то допустимых траекторий, выходящих из некоторого фиксированного начального состояния, может быть очень много. При определенных дополнительных предположениях множество таких траекторий представляет собой компакт в подходящим образом выбранном функциональном пространстве.

В теории идеальной (оптимальной) экономики предполагается заданным (глобальный) критерий оптимальности, выделяющий в множестве допустимых траекторий подмножество экстремальных в смысле этого критерия траекторий. В книге изучаются два основных класса экстремальных траекторий: *эффективные (оптимальные)* траектории и *U-оптимальные* траектории. Траектория $(\bar{x}_t, \bar{\gamma}_t)_{t=0}^{\infty}$ эффективна, если не существует другой допустимой траектории $(x_t, \gamma_t)_{t=0}^{\infty}$, выходящей из того же начального состояния и такой, что $(x_t, \gamma_t) = \lambda (\bar{x}_t, \bar{\gamma}_t)$ ($\lambda > 1$) хотя бы для одного момента t . Понятие U-оптимальности траектории является сужением понятия эффективности. Траектория $(\bar{x}_t, \bar{\gamma}_t)_{t=0}^{\infty}$ U-оптимальна, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{\gamma}_t - \gamma_t) \geq 0$$

для любой траектории $(x_t, \gamma_t)_{t=0}^{\infty}$, выходящей из того же самого начального состояния x_0 .

В книге изучаются теоремы существования для эффективных и U-оптимальных траекторий. Большое место отведено на изложение теорем о характеристике экстремальных траекторий. Теоремы о характеристике формулируют необходимые или необходимые и достаточные условия экстремальности. Эти теоремы играют ту же роль, что и теоремы двойственности в задачах выпуклого программирования.

вания или принцип максимума для задач оптимального управления. Соответствующие связи и аналоги устанавливаются в основном изложении.

Магистралы. Асимптотика. Важным вопросом с точки зрения экономических приложений и численных алгоритмов нахождения экстремальных траекторий является вопрос о существовании и свойствах стационарных экстремальных траекторий, так называемых *магистралей*. Стационарность траектории здесь понимается как соотношение $x_{t+1} = \alpha \cdot x_t$ либо $p(x_{t+1}) / p(x_t) = \alpha$ для некоторого положительного функционала p и всех t .

Оказывается, что стационарные эффективные траектории тесным образом связаны с собственными векторами соответствующего точечно-множественного отображения. Стационарные U -оптимальные траектории (магистралы) могут быть получены из решения специальным образом составленных задач выпуклого программирования. Это обстоятельство очень существенно, поскольку задача численного нахождения U -оптимальных траекторий в общем случае очень трудна. Благодаря же возможности вычислять магистралы и теоремам о магистралах (о сходимости произвольной U -оптимальной траектории к магистрале) появляются способы приближенного нахождения U -оптимальных траекторий.

Вообще, изучению асимптотических свойств экстремальных траекторий уделено значительное место. Упомянутые теоремы о магистралах имеют несколько различных типов в зависимости от способа стремления к стационарной экстремальной траектории.

Равновесные траектории. Математические модели экономического равновесия рассматриваются в книге в значительно меньшем объеме, чем модели динамики. В основном затрагиваются такие вопросы, которые имеют связь с моделями экономической динамики и вообще логически связаны с основным объектом изучения — траекториями развития экономики. Как уже отмечалось выше, состояние равновесия и равновесная траектория зависят от того, как экономическая система разбита на части и каковы взаимоотношения между этими частями.

Проиллюстрируем понятие равновесной траектории на примере сформулированной выше однопродуктовой модели. В этой модели выделяются две части: держатели фондов

(владельцы капитала) и владельцы рабочей силы (трудящиеся). В зависимости от интерпретации можно говорить о классе капиталистов и классе рабочих или о государстве и населении и т. д. Обе части, и государство и население, выступают в двойной роли, роли производителя и роли потребителя. Как производители, они стремятся максимизировать свою «прибыль» или «доход», а как потребители — максимизировать свою функцию цели. Для государства — это объем фондов всей экономики, для населения — это заданная функция полезности u . Взаимоотношения между государством и населением задаются с помощью последовательности $\theta = (\theta_t^r, \theta_t^h)_{t=0}^\infty$, где число $\theta_t^r \geq 0$ показывает долю «прибыли» государства в период t , которую оно отчисляет населению в этот период, а число θ_t^h показывает долю заработной платы населения, которую государство получает в период t .

Обозначим через $p_t = (\pi_t, w_t)$ произвольный вектор цен, относящихся к периоду t , где π_t — цена единицы продукта, w_t — цена труда (зарботная плата трудящихся).

Траектория $(x_t, \bar{c}_t)_{t=0}^\infty$ называется *равновесной*, если существует такая неотрицательная последовательность цен $\bar{p} = (\bar{p}_t)_{t=0}^\infty$, что выполнены следующие условия:

1) $f(x_{t-1}) \bar{\pi}_t - \bar{w}_t = \max (\lambda y \cdot \bar{\pi}_t - \lambda \cdot \bar{w}_t)$, где \max берется по всем (y, λ) , удовлетворяющим ограничениям: $0 \leq y \leq f(x_{t-1})$, $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$2) \bar{w}_t = \max_{0 \leq \lambda \leq 1} \lambda w_t,$$

$$3) x_t = \max_{x \bar{\pi}_t \leq D_t^r} x, \text{ где } D_t^r = (f(x_{t-1}) \bar{\pi}_t - \bar{w}_t) \theta_t^r + \bar{w}_t \cdot \theta_t^h,$$

$$4) u(\bar{c}_t) = \max_{c \bar{\pi}_t \leq D_t^h} u(c), \text{ где } D_t^h = \bar{w}_t \cdot (1 - \theta_t^h) + (f(x_{t-1}) \bar{\pi}_t -$$

$$- \bar{w}_t) (1 - \theta_t^r).$$

Условия 1) и 2) показывают, что и государство и население на равновесной траектории получают максимальную прибыль в ценах равновесия. Условия 3) и 4) говорят о том, что обе части экономической системы реализуют максимальные значения своих целевых функций при соответствующих бюджетных ограничениях.

Из приведенного определения видно, что равновесная траектория — это довольно сложное образование. Однако

оказывается, что всякая U -оптимальная траектория является равновесной относительно специально подобранного разбиения на части и последовательности θ . Устанавливаются также условия, при которых верно обратное утверждение относительно оптимальности равновесной траектории.

Теоремы, связывающие равновесные и оптимальные траектории, вносят известный вклад в общеэкономическую проблему о взаимоотношении локальных и глобального критериев оптимальности, централизации и децентрализации в управлении экономикой, наконец, о роли экономических механизмов при управлении экономической системой.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Выпуклые множества, конусы, аффинные многообразия. Всюду в этой книге используются свойства выпуклых множеств, конусов и аффинных многообразий; поэтому прежде всего напомним читателю важнейшие из этих свойств. Вначале введем определения простейших геометрических объектов.

Пусть x, y — элементы конечномерного вещественного векторного пространства X . Рассмотрим линейные комбинации $\lambda x + (1 - \lambda) y = y + \lambda (x - y)$ этих точек и образуем множество $\xi_\Lambda = \{\lambda x + (1 - \lambda) y \mid \lambda \in \Lambda\}$, где Λ — некоторое множество вещественных чисел.

Если $\Lambda = [0, 1]$, то ξ_Λ называют *отрезком*, соединяющим точки x и y ; если $\Lambda = [0, +\infty)$, то ξ_Λ называют *лучом в направлении $x - y$ с вершиной в точке y* ; наконец, если $\Lambda = (-\infty, \infty)$, то ξ_Λ называют *прямой, проходящей через точки x и y* .

Определим теперь интересующие нас объекты.

Будем говорить, что непустое подмножество Ω пространства X *выпукло*, если с каждыми двумя своими точками Ω содержит и отрезок, их соединяющий; Ω — *конус с вершиной в точке y* , если с каждой своей точкой x это множество содержит и луч в направлении $x - y$ с вершиной в y ; наконец, множество Ω называется *плоским (или аффинным многообразием)*, если с каждыми двумя своими точками оно содержит всю прямую, проходящую через эти точки.

2. Гиперплоскости. Отделимость. Говорят, что плоское множество H является *гиперплоскостью*, если оно максимально. Это означает, что $H \neq X$ и из включения $H \subset H'$,

*) Эта глава носит вводный характер. В ней сообщаются основные сведения, используемые в дальнейшем изложении.

где H' — плоское множество, следует одно из двух: либо $H' = H$, либо $H' = X$. Легко проверить, что H является гиперплоскостью тогда и только тогда, когда размерность H на единицу меньше размерности пространства X .

Существует тесная связь между гиперплоскостями и линейными функционалами. Точнее говоря, множество H является гиперплоскостью тогда и только тогда, когда найдутся линейный функционал $f \neq 0$ и число α такие, что $H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$.

Если, кроме того, $H = \{x \in X \mid g(x) = \beta\}$, то функционалы f и g пропорциональны (т. е. $g = \lambda f$ при некотором $\lambda \neq 0$).

Пусть гиперплоскость H есть множество решений уравнения $f(x) = \alpha$. Множества $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ и $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$ называются *замкнутыми полупространствами*, а множества $\{x \in X \mid f(x) < \alpha\}$ и $\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ — *открытыми полупространствами*, определяемыми гиперплоскостью H . (Хотя в определении фигурируют функционал f и число α , полупространства определяются именно гиперплоскостью.)

Опишем некоторые свойства рассматриваемых множеств, связанные с понятием сходимости. Будем считать в связи с этим, что в пространстве X введена некоторым образом норма (каким именно — безразлично, ибо в конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны: из сходимости по одной норме следует сходимость по другой, и наоборот).

Отметим, что аффинное многообразие всегда замкнуто; замкнутые (открытые) полупространства являются замкнутыми (открытыми) множествами.

Под *аффинной оболочкой* множества $\Omega \subset X$ понимается «наименьшее» аффинное многообразие, содержащее Ω (т. е. пересечение всех аффинных многообразий, содержащих Ω). Точка x называется *относительно внутренней* точкой множества Ω , если пересечение некоторой окрестности этой точки с аффинной оболочкой Ω целиком содержится в Ω . *Относительная внутренность* множества Ω (т. е. совокупность всех относительно внутренних точек этого множества) обозначается символом $\text{ri } \Omega$. (Напомним, что внутренность выпуклого множества Ω обозначается символом $\text{int } \Omega$; если $\text{int } \Omega \neq \emptyset$, то $\text{int } \Omega = \text{ri } \Omega$.)

Мы можем теперь сформулировать одно из существенных свойств выпуклых множеств, которое заключается в следующем: *каково бы ни было выпуклое множество Ω в конечномерном пространстве X , оно имеет непустую относительную внутренность* (т. е. $\text{ri } \Omega \neq \varnothing$) (см. Рокафеллар [3]).

Мощным аппаратом для исследования выпуклых множеств являются теоремы отделимости. Прежде чем сформулировать их, введем следующее определение.

Говорят, что гиперплоскость H *разделяет* (соответственно, *строго разделяет*) множества Ω_1 и Ω_2 , если эти множества лежат в разных замкнутых (соответственно, открытых) полупространствах, определяемых H .

Используя связь между гиперплоскостями и линейными функционалами, можно сформулировать это определение в терминах функционалов.

Имеет место

Теорема 1.1 (теорема отделимости). Пусть Ω_1 и Ω_2 — выпуклые множества в конечномерном пространстве X , причем

$$(\text{ri } \Omega_1) \cap (\text{ri } \Omega_2) = \varnothing.$$

Тогда найдется гиперплоскость, разделяющая Ω_1 и Ω_2 .

Как непосредственно следует из определения, выпуклые множества, строго разделяемые некоторой гиперплоскостью, не пересекаются.

Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места, т. е. существуют выпуклые непересекающиеся множества, которые нельзя строго разделить. Простейшим примером пары таких множеств могут служить «внутренность» одной из ветвей гиперболы и асимптота этой гиперболы (рис. 1). Следующая ниже теорема показывает, что при некоторых дополнительных предположениях строгое разделение все же возможно.

Теорема 1.2. Пусть Ω_1 и Ω_2 — выпуклые замкнутые множества в X , причем хотя одно из них ограничено. Тогда если эти множества не пересекаются, то найдется гиперплоскость, строго их разделяющая.

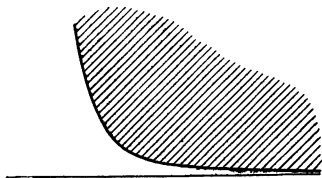


Рис. 1.

Прежде чем привести еще одну теорему о строгом разделении, введем одно важное определение. Непустое множество Ω в X называется *выпуклым многогранником*, если оно может быть представлено в виде пересечения конечного числа замкнутых полупространств. Ясно, что выпуклый многогранник является выпуклым замкнутым множеством.

Т е о р е м а 1.3. Пусть Ω_1 и Ω_2 — непересекающиеся выпуклые многогранники в X . Тогда найдется гиперплоскость, строго их разделяющая.

Рассмотрим выпуклое множество Ω и его замыкание $\bar{\Omega}$. Нетрудно проверить, что $\text{ri } \Omega = \text{ri } \bar{\Omega}$. Точку $x \in X$ назовем относительно граничной точкой множества Ω , если $x \in \bar{\Omega} \setminus \text{ri } \Omega$.

Гиперплоскость H называется *опорной* к множеству Ω в точке x , если $x \in H$ и Ω содержится в одном из замкнутых полупространств, определяемых этой гиперплоскостью. (Если $H = \{x \mid f(x) = c\}$, где f — линейный функционал, то высказанное определение означает, что либо $f(x) = \sup_{y \in \Omega} f(y)$, либо $f(x) = \inf_{y \in \Omega} f(y)$.)

Из теоремы 1.1 легко вытекает следующая

Т е о р е м а 1.4. Для любой относительно граничной точки x выпуклого множества Ω существует гиперплоскость, опорная к Ω в точке x .

Теорему 1.4 можно несколько усилить; точнее говоря, опорную гиперплоскость можно выбрать так, чтобы она не содержала аффинной оболочки множества Ω . Сформулируем это утверждение в аналитической форме.

Т е о р е м а 1.4'. Пусть x — относительно граничная точка выпуклого множества Ω . Тогда существует линейный функционал f такой, что

$$\sup_{y \in \Omega} f(y) = f(x) > \inf_{y \in \Omega} f(y).$$

Доказательства теорем 1.1—1.4' содержатся, например, в работах Карлина [1]. Рокафеллара [3].

3. Алгебраические операции над выпуклыми множествами. Совокупность всех выпуклых подмножеств рассматриваемого конечномерного пространства X обозначим через $\Pi_b(X)$. В множестве $\Pi_b(X)$ можно естественным образом ввести операции сложения и умножения на вещест-

венное число (так называемые операции Минковского). Если $\Omega_1, \Omega_2 \in \Pi_b(X)$, то суммой множеств Ω_1 и Ω_2 называют множество

$$\Omega_1 + \Omega_2 = \{z \in X \mid z = x + y, x \in \Omega_1, y \in \Omega_2\}.$$

Если $\Omega \in \Pi_b(X)$, $\lambda \in R^1$ (символом R^1 здесь и в дальнейшем обозначается вещественная прямая), то, по определению, $\lambda\Omega = \{z \in X \mid z = \lambda x, x \in \Omega\}$.

Под разностью $\Omega_1 - \Omega_2$ множеств Ω_1 и Ω_2 понимается множество $\Omega_1 + (-\Omega_2)$, т. е.

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \{z \in X \mid z = x - y, x \in \Omega_1, y \in \Omega_2\}.$$

Нетрудно проверить, что сумма выпуклых множеств и произведение выпуклого множества на число выпуклы. Отметим еще, что сумма ограниченных множеств ограничена, сумма компактных множеств компактна, однако сумма замкнутых множеств, вообще говоря, не замкнута.

4. Выпуклые конусы и сопряженные им. В п. 1 мы определили конус с вершиной в точке y . В дальнейшем, как правило, будет рассматриваться случай, когда $y = 0$. Конус с вершиной в нуле будем называть просто *конусом*.

Заметим, что конус является выпуклым тогда и только тогда, когда он с каждой парой своих элементов содержит и их сумму.

Пусть K — выпуклый конус в пространстве X . Конус K^* , *сопряженный к K* , определяется как совокупность всех линейных функционалов, принимающих на K лишь неотрицательные значения. В дальнейшем пространство, сопряженное к X (т. е. совокупность всех линейных на X функционалов), будем обозначать через X^* . Таким образом

$$K^* = \{f \in X^* \mid f(x) \geq 0 \text{ для всех } x \in K\}.$$

Непосредственно из определения следует, что K^* — выпуклый замкнутый конус. Если $f \in K^*$, то $\inf_{x \in K} f(x) = 0$; если же $f \notin K^*$, то $\inf_{x \in K} f(x) = -\infty$. В самом деле, так как $f \notin K^*$, то найдется $x \in K$, для которого $f(x) < 0$. Так как K — конус, то луч $(\lambda x)_{\lambda > 0}$ содержится

в K и потому

$$\inf_{y \in K} f(y) \leq \inf_{\lambda \geq 0} f(\lambda x) = -\infty.$$

Из сказанного следует, что линейный функционал, ограниченный снизу на конусе K , входит в K^* .

Это простое замечание позволяет несколько уточнить теоремы отделимости для случая конуса. Именно, если в теоремах 1.1—1.3 одно из множеств Ω_1, Ω_2 является конусом, то гиперплоскость, существование которой эти теоремы утверждают, можно выбрать так, чтобы она проходила через нуль. В частности, гиперплоскость, опорная к выпуклому конусу в его граничной точке, всегда проходит через нуль.

Так как K^* является выпуклым конусом, то имеет смысл говорить о конусе K^{**} , сопряженном к K^* . Используя теоремы отделимости, нетрудно проверить, что K^{**} совпадает с замыканием конуса K (при этом, разумеется, используется то обстоятельство, что пространство X^{**} , сопряженное к X^* , совпадает с X).

Выпуклый замкнутый конус K в пространстве X называется *выступающим*, если из соотношений $x, -x \in K$ следует, что $x = 0$; конус K называется *воспроизводящим*, если $K - K = X$. Введенные понятия взаимно двойственны; иными словами, если K — воспроизводящий конус, то K^* — выступающий, если K — выступающий конус, то K^* — воспроизводящий.

Из определения непосредственно следует, что K — воспроизводящий конус тогда и только тогда, когда его аффинная (или, что в данном случае то же самое, линейная) оболочка совпадает со всем X . Из сказанного вытекает, что воспроизводящий конус телесен (т. е. содержит внутренние точки). Ясно, что и наоборот, телесный конус является воспроизводящим.

5. Отношение предпорядка, порожденное конусом. Пусть K — выпуклый замкнутый конус в X и $x, y \in X$. Будем говорить, что x следует за y , и писать $x \geq y$, если $x - y \in K$. Отношение \geq обладает свойствами:

- 1) если $x \geq y, y \geq z$, то $x \geq z$;
- 2) если $x \geq y$, то $x + z \geq y + z$ для любого $z \in X$;
- 3) если $x \geq y$, то $\lambda x \geq \lambda y$ при любом $\lambda \geq 0$;
- 4) если $x_n \rightarrow x, x_n \geq y$ при всех n , то $x \geq y$.

Отметим еще, что $K = \{x \in X \mid x \geq 0\}$. Из сказанного вытекает, что \geq является отношением предпорядка, согласованным с векторной и топологической структурой X . Будем говорить, что отношение \geq порождается конусом K . Нетрудно поверить, что отношение \geq является отношением порядка тогда и только тогда, когда порождающий его конус выступает.

Если $x \geq y$, то имеет смысл рассмотреть множество $\langle y, x \rangle = \{z \in X \mid y \leq z \leq x\}$. Это множество называется *конусным отрезком* с концами x, y . Нас особо будут интересовать конусные отрезки вида $\langle 0, x \rangle$. Очевидно, что $\langle 0, x \rangle = (x - K) \cap K$. Отрезок $\langle 0, x \rangle$ является выпуклым замкнутым множеством. Если, кроме того, K выступает, то этот отрезок ограничен по норме и, стало быть, компактен. Если K — воспроизводящий конус и $x \in \text{int } K$, то отрезок $\langle 0, x \rangle$ телесен.

Если в X введено отношение предпорядка с помощью конуса K , то элементы этого конуса называются *положительными*. (Таким образом, нуль — также положительный элемент; термин неотрицательный здесь не подходит, ибо неотрицательные элементы образуют множество $X \setminus (-K)$.)

Элементы конуса K^* называются *положительными функционалами*. (Эта терминология согласуется с введенной ранее, если считать, что отношение предпорядка в X^* порождено конусом K^* .) Заметим, что функционал f положителен в том и только том случае, когда он монотонен (т. е. $f(x) \geq f(y)$, если $x \geq y$).

6. Выпуклая и коническая оболочки. Пусть Ω — подмножество пространства X . *Выпуклой оболочкой* со Ω множества Ω называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих Ω . Непосредственно из определения следует, что

$$\text{co } \Omega = \left\{ z \in X \mid z = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i; \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \right. \\ \left. \alpha_i \geq 0, x_i \in \Omega, i = 1, 2, \dots, k; k = 1, 2, \dots \right\} \quad (1.4)$$

(здесь k — любое натуральное число; можно, впрочем, показать, что достаточно рассматривать суммы, содержащие

не более $n + 1$ слагаемых, где n — размерность пространства X). Используя представление (1.1), нетрудно проверить, что для любого линейного функционала f имеет место равенство

$$\sup_{y \in \Omega} f(y) = \sup_{y \in \text{co } \Omega} f(y).$$

Один из основных фактов теории выпуклых многогранных множеств заключается в том, что ограниченное множество является выпуклым многогранником в том и только том случае, когда оно совпадает с выпуклой оболочкой конечного множества точек. Отметим еще, что выпуклая оболочка компакта является компактным множеством.

Конической оболочкой (точнее, выпуклой конической оболочкой) подмножества Ω пространства X называется множество $\text{Co } \Omega$, совпадающее с пересечением всех выпуклых конусов, содержащих Ω . Нетрудно проверить, что $\text{Co } \Omega = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(\text{co } \Omega)$. (В частности, если Ω выпукло, то $\text{Co } \Omega = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \Omega$.) Из сказанного следует, что элемент z входит в $\text{Co } \Omega$ тогда и только тогда, когда найдутся натуральное k , элементы $x_1, x_2, \dots, x_k \in \Omega$ и неотрицательные числа

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$, при которых $z = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$. Конус $\text{Co } \Omega$ не обязан

быть замкнутым, даже если Ω компактно. Если, однако, Ω помимо компактности обладает тем свойством, что $0 \notin \text{co } \Omega$, то $\text{Co } \Omega$ — замкнутый конус. Непосредственно из определения следует, что $\text{Co } \Omega = \text{Co}(\text{co } \Omega)$. Если Ω — конус (вообще говоря, невыпуклый), то $\text{Co } \Omega = \text{co } \Omega$.

7. Многогранные конусы. Конус K называется *многогранным*, если он совпадает с конической оболочкой конечного множества элементов. Многогранный конус K является выпуклым многогранником, и, стало быть, K — выпуклый замкнутый конус. Конус K^* , сопряженный к многогранному конусу K , также многогранен. Если K_1, K_2, \dots, K_m — многогранные конусы, то и конус $K = \text{Co}(K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m)$ многогранен. Пусть $X = X_1 + X_2$, где подпространства X_1 и X_2 пересекаются лишь в нуле. В этом случае проекция многогранного конуса на X_1 (параллельно X_2) также является многогран-

ным конусом. В частности, проекция многогранного конуса замкнута (заметим, что проекция выпуклого замкнутого конуса может быть и незамкнутой).

8. Выпуклые функции. Пусть f — функция, определенная на множестве Ω . *Графиком* называется множество $\{(x, \lambda) \in \Omega \times R^1 \mid \lambda = f(x)\}$. *Надграфиком* функции f называется множество $\{(x, \lambda) \in \Omega \times R^1 \mid \lambda \geq f(x)\}$, а *подграфиком* — множество $\{(x, \lambda) \in \Omega \times R^1 \mid \lambda \leq f(x)\}$.

Введем теперь следующее определение.

Функция f , определенная на выпуклом множестве Ω в пространстве X , называется *выпуклой*, если

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

$$(x, y \in X; \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1). \quad (1.2)$$

Из этого определения следует, что f выпукла тогда и только тогда, когда ее надграфик является выпуклым множеством в пространстве $X \times R^1$.

Отметим некоторые свойства выпуклых функций.

- 1) Сумма выпуклых функций выпукла.
- 2) Произведение выпуклой функции на неотрицательное число является выпуклой функцией.
- 3) Пусть $(f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ — выпуклые функции, определенные на множестве Ω , причем для каждого $x \in \Omega$ существует число C такое, что для всех $\gamma \in \Gamma$

$$f_\gamma(x) \leq C.$$

Тогда функция f , определенная формулой

$$f(x) = \sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x) \quad (x \in \Omega),$$

выпукла.

- 4) Локальный минимум выпуклой функции f совпадает с ее глобальным минимумом.

- 5) Выпуклая функция f непрерывна в относительно внутренних точках Ω .

Свойства 1) — 4) легко следуют непосредственно из определения. Доказательство более сложного утверждения 5) читатель может найти в работах Карлина [1], Рокафеллара [3].

Функция f , определенная на выпуклом множестве Ω , называется *вогнутой*, если $-f$ есть выпуклая функция;

Иными словами,

$$f(\alpha x + \beta y) \geq \alpha f(x) + \beta f(y) \\ (x, y \in \Omega, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1). \quad (1.3)$$

Все изложенное выше с очевидными изменениями переносится на случай вогнутой функции. Отметим, в частности, что f вогнута тогда и только тогда, когда ее подграфик является выпуклым множеством.

Если в (1.2) (соответственно, (1.3)) имеет место строгое неравенство при $x \neq y$ и $\alpha, \beta > 0$, то функция f называется *строго выпуклой* (соответственно, *строго вогнутой*).

Важное свойство строго выпуклой функции f заключается в том, что если она достигает минимума на Ω , то этот минимум реализуется лишь в единственной точке.

9. Полу непрерывные функции. В этом пункте сформулируем некоторые простые свойства полунепрерывных функций.

Функция f , определенная на множестве Ω в пространстве X , называется *полунепрерывной сверху* (соответственно, *снизу*) в точке $x \in \Omega$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность V точки x , что $f(y) \leq f(x) + \varepsilon$ (соответственно, $f(y) \geq f(x) - \varepsilon$) для всех $y \in V \cap \Omega$.

В терминах последовательностей полунепрерывность сверху (соответственно, снизу) означает, что для любой последовательности (x_n) элементов Ω такой, что $x_n \rightarrow x$, выполняется неравенство $\overline{\lim} f(x_n) \leq f(x)$ (соответственно, $\underline{\lim} f(x_n) \geq f(x)$).

В дальнейшем мы говорим лишь о полунепрерывных сверху функциях, имея в виду, что все сказанное ниже с естественными изменениями переносится и на полунепрерывные снизу функции.

Мы будем рассматривать лишь функции, полунепрерывные сверху на всем множестве Ω (т. е. в каждой точке Ω). Отметим некоторые их свойства.

1) Сумма двух полунепрерывных сверху функций полунепрерывна сверху.

2) Произведение полунепрерывной сверху функции на неотрицательное число полунепрерывно сверху.

3) Нижняя огибающая ограниченного снизу семейства полунепрерывных сверху функций является полунепрерывной сверху. Иными словами, если функции f_γ ($\gamma \in \Gamma$)

полунепрерывны сверху на Ω и ограничены снизу на этом множестве, то функция

$$f(x) = \inf_{\gamma \in \Gamma} f_{\gamma}(\bar{x}) \quad (x \in \Omega)$$

полунепрерывна сверху.

4) Если Ω замкнуто, то функция f полунепрерывна сверху тогда и только тогда, когда ее подграфик замкнут.

5) Если Ω компактно, то полунепрерывная сверху функция f , определенная на Ω , достигает на этом множестве максимума (теорема Вейерштрасса).

Доказательство утверждений 1) — 5) легко следует непосредственно из определения.

В заключение этого параграфа сформулируем теорему о минимаксе и теорему Куна — Таккера (в нужной для дальнейшего форме).

Пусть X_1 и X_2 — конечномерные пространства, Ω_1 — выпуклый компакт в X_1 , Ω_2 — выпуклое множество в X_2 . Рассмотрим функцию f , определенную на $\Omega_1 \times \Omega_2$, вогнутую по x и выпуклую по y (последнее означает, что при любом $y \in \Omega_2$ функция $p_y: x \rightarrow f(x, y)$ вогнута на Ω_1 , при любом $x \in \Omega_1$ функция $q_x: y \rightarrow f(x, y)$ выпукла на Ω_2). Предположим, далее, что f полунепрерывна сверху по x (т. е. функция p_y полунепрерывна сверху при всех y). Имеет место

Теорема 1.5 (теорема о минимаксе).
Если множества Ω_1 , Ω_2 и функция f удовлетворяют сформулированным выше условиям, то

$$\sup_{x \in \Omega_1} \inf_{y \in \Omega_2} f(x, y) = \inf_{y \in \Omega_2} \sup_{x \in \Omega_1} f(x, y).$$

Доказательство этой теоремы см., например, Пек и Далмидж [1].

Перейдем к теореме Куна — Таккера, дающей двойственную характеристику решения задачи выпуклого программирования. Будем считать, что указанная задача заключается в отыскании крайней точки пересечения выпуклого конуса и оси. Приведем ее точную формулировку.

В конечномерном пространстве X выделен выпуклый телесный конус K . В пространстве $X \times R^1$ задан выпуклый конус Z , содержащий множество $K \times \{0\}$ (т. е. из

соотношения $x \in K$ следует, что $(-x, 0) \in Z$). Далее, в пространстве $X \times R^1$ задана прямая $\Pi = ((b, \lambda))_{\lambda \in (-\infty, +\infty)}$, пересекающая конус Z . Рассматриваемая задача заключается в следующем: найти $\mu = \max \{\lambda \mid (b, \lambda) \in Z\}$. Предполагаем, что решение существует. Положим $(b, \mu) = z_0$.

Теорема 1.6 (теорема Куна — Таккера). Пусть выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

а) конус Z многогранен

б) прямая Π содержит внутреннюю точку конуса Z .

Тогда найдется функционал $\pi = (p, \gamma) \in X^* \times R^1$ такой, что

$$1) \pi(z_0) = \max_{z \in Z} \pi(z) = 0,$$

$$2) p \in K^*; \gamma > 0.$$

Доказательство следует из теорем отделимости. Заметим, что в случае, когда Z — не многогранный конус и условие б) (называемое обычно условием Слейтера) не имеет места, можно гарантировать лишь, что вместо строгого неравенства $\gamma > 0$ выполняется $\gamma \geq 0$.

§ 2. СУПЕРЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

1. Суперлинейные функционалы. Исследование суперлинейных точечно-множественных отображений и динамических моделей экономики, которым посвящена основная часть этой книги, существенно опирается на свойства суперлинейных функционалов. В настоящем параграфе устанавливаются эти свойства и связи между суперлинейными функционалами и выпуклыми множествами.

Функционал q , определенный на замкнутом выпуклом конусе K в векторном конечномерном пространстве X , называется *суперлинейным*, если он

1) *супераддитивен*: для $x, y \in K$

$$q(x + y) \geq q(x) + q(y),$$

2) *положительно однороден*:

$$q(\lambda x) = \lambda q(x) \quad (x \in K, \lambda > 0),$$

3) *полунепрерывен сверху*.

Функционал p , определенный на K , называется *сублинейным*, если он *субаддитивен*, ($p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ для $x, y \in K$), положительно однороден и полунепрерывен снизу. Ясно, что p сублинеен тогда и только тогда, когда функционал $q = -p$ суперлинеен. Таким образом, изучение сублинейных функционалов сводится к изучению суперлинейных функционалов (и наоборот). В связи с этим мы иногда будем формулировать и доказывать интересующие нас результаты лишь для одного из указанных классов функционалов.

Условимся совокупность всех суперлинейных функционалов, определенных на выпуклом замкнутом конусе K , обозначать через $Q(K)$.

Отметим некоторые простые свойства суперлинейных функционалов.

1) Если $q \in Q(K)$, то q вогнут. В самом деле, для $x, y \in K$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ имеем $q(\alpha x + \beta y) \geq q(\alpha x) + q(\beta y) = \alpha q(x) + \beta q(y)$.

Заметим, что и наоборот, вогнутый, положительно однородный полунепрерывный сверху функционал суперлинеен.

Из 1) следует, в частности, что

2) q непрерывен на множестве $ri K$.

3) Если $q \in Q(K)$, то $q(0) = 0$. Это равенство следует из соотношений $q(0) = q(2 \cdot 0) = 2 \cdot q(0)$.

4) Функционал q , определенный на конусе K , суперлинеен тогда и только тогда, когда подграфик

$$Z_q = \{(x, \lambda) \in X \times R^1 \mid x \in K, \lambda \leq q(x)\}$$

этого функционала является выпуклым замкнутым конусом.

В самом деле, выпуклость Z_q эквивалентна вогнутости q , замкнутость Z_q — полунепрерывности сверху q ; положительная однородность q эквивалентна тому, что Z_q — конус.

5) Если $q_1, q_2 \in Q(K)$, то и $q_1 + q_2 \in Q(K)$.

6) Если $q \in Q(K)$, $\lambda \geq 0$, то и $\lambda q \in Q(K)$.

7) Нижняя огибающая ограниченного снизу семейства суперлинейных функционалов является суперлинейным функционалом. Иными словами, если $q_\alpha \in Q(K)$ ($\alpha \in A$) и для каждого $x \in K$ найдется такое C , что $q_\alpha(x) \geq C$ при всех $\alpha \in A$, то функционал q , определенный

на K формулой

$$q(x) = \inf_{\alpha} q_{\alpha}(x) \quad (x \in K),$$

суперлинеен.

Для доказательства достаточно отметить, что вогнутость, полунепрерывность сверху и положительная однородность элементов семейства сохраняются при переходе к нижней огибающей.

2. Примеры. Прежде чем привести несколько примеров суперлинейных и сублинейных функционалов условимся о следующем: символом R^n в этой книге всегда будет обозначаться n -мерное арифметическое (числовое) пространство; i -ю компоненту вектора x из R^n будем обозначать через x^i ; символ R_+^n обозначает конус векторов пространства R^n с неотрицательными компонентами; записи $x \geq y$, $x > y$ и $x \gg y$ означают соответственно, что $x^i \geq y^i$ для всех i ; $x^i \geq y^i$ для всех i и хотя бы для одного j выполняется $x^j > y^j$; $x^i > y^i$ для всех i .

Перейдем к примерам.

Пример 1. Пусть X — конечномерное векторное пространство, $K = X$. Всякий линейный функционал является одновременно сублинейным и суперлинейным на X функционалом.

Пример 2. Пусть X и K такие же, что и в примере 1. Функционал $p(x) = \|x\|$ является сублинейным на X функционалом. В частности, отсюда вытекает

Пример 3. Функционал p , определенный при $r \geq 1$ на R^n формулой

$$p(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x^i|^r \right)^{1/r} \quad (x \in R^n),$$

сублинеен (субаддитивность этого функционала составляет содержание известного неравенства Минковского).

Пример 4. Если $0 < r \leq 1$, то функционал q , определенный на конусе R_+^n той же формулой, что и выше:

$$q(x) = \left(\sum_{i=1}^n (x^i)^r \right)^{1/r} \quad (x \in R_+^n),$$

суперлинеен.

В доказательстве нуждается лишь супераддитивность; иными словами, надо проверить, что при любых $x, y \in R_+^n$ справедливо

неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n (x^i + y^i)^r \right)^{1/r} \geq \left(\sum_{i=1}^r (x^i)^r \right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^n (y^i)^r \right)^{1/r}. \quad (2.1)$$

Мы не останавливаемся на доказательстве (2.1). Оно приводится, например, в книге Беккенбаха и Беллмана [1] (см. § 22 гл. I).

Пример 5. Функционал q , определенный на конусе R_+^n формулой

$$q(x) = \left(\prod_{i=1}^n x^i \right)^{1/n},$$

суперлинеен.

В доказательстве нуждается, как и выше, лишь супераддитивность функционала q . Положим $Z = \{z \in R_+^n \mid \prod_{i=1}^n z^i = 1\}$.

Пусть $x \geq 0$, $z \in Z$. Тогда, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{x^i z^i}{n} \geq \left(\prod_{i=1}^n x^i \right)^{1/n} = q(x).$$

Предположим теперь, что $x \geq 0$, и рассмотрим вектор $\hat{z} = q(x) \left(\frac{1}{x^1}, \dots, \frac{1}{x^n} \right)$. (Заметим, что $\hat{z} = n(\text{grad } q)(x)$.) Ясно, что

$$\hat{z} \in Z \text{ и, кроме того, } \sum_{i=1}^n \frac{x^i \hat{z}^i}{n} = q(x).$$

Таким образом, для $x \geq 0$ выполняется

$$q(x) = \min_{z \in Z} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^i z^i.$$

Пусть теперь $x \geq 0$, $y \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} q(x+y) &= \frac{1}{n} \min_{z \in Z} \sum_{i=1}^n (x^i + y^i) z^i \geq \\ &\geq \frac{1}{n} \left(\min_{z \in Z} \sum_{i=1}^n x^i z^i + \min_{z \in Z} \sum_{i=1}^n y^i z^i \right) = q(x) + q(y). \end{aligned}$$

Из непрерывности q следует, что неравенство

$$q(x+y) \geq q(x) + q(y)$$

выполняется на всем конусе R_+^n , что и требовалось доказать.

3. Опорные линейные функционалы. Пусть K — выпуклый замкнутый конус в пространстве X . Для подмножества U пространства X^* и элемента $x \in K$ положим

$$q_U(x) = \inf_{h \in U} h(x). \quad (2.2)$$

В случае, когда $q_U(x) > -\infty$ для любого $x \in K$, функционал q_U , определенный на конусе K формулой (2.2), является суперлинейным. Важнейший факт теории суперлинейных функционалов заключается в том, что справедливо обратное утверждение: каждый суперлинейный функционал представим в виде (2.2). Это утверждение было впервые доказано, по-видимому, Фенхелем [1].

Прежде чем привести точную формулировку теоремы Фенхеля, дадим следующее определение: линейный функционал h называется *опорным* к суперлинейному функционалу q , определенному на конусе K , если для любого $x \in K$ $h(x) \geq q(x)$. Множество всех линейных функционалов, опорных к q , обозначим через U_q .

В этих терминах интересующий нас результат формулируется так.

Т е о р е м а 2.1 (В. Ф е н х е л ь). Если $q \in Q(K)$, то множество U_q непусто; при этом для любого $x \in K$

$$q(x) = \inf_{h \in U_q} h(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим подграфик

$$Z_q = \{(x, \mu) \in X \times R^1 \mid x \in K, \mu \leq q(x)\}$$

функционала q . Так как $q \in Q(K)$, то Z_q — выпуклый замкнутый конус. Пусть y — произвольная точка из K , ε — произвольное положительное число. Поскольку $(y, q(y) + \varepsilon) \notin Z_q$, то, используя теорему отделимости, можно указать функционал $g \in (X \times R^1)^*$, для которого

$$g((x, \mu)) \geq 0 \quad ((x, \mu) \in Z_q), \quad g(y, q(y) + \varepsilon) < 0. \quad (2.3)$$

Так как $g \in (X \times R^1)^*$, то $g = (f, c)$, где $f \in X^*$, $c \in R^1$. (Мы используем равенство $(X \times R^1)^* = X^* \times R^1$.) Из (2.3) теперь вытекают соотношения

$$f(x) + cq(x) \geq 0 \quad (x \in K), \quad (2.4)$$

$$f(y) + c(q(y) + \varepsilon) < 0. \quad (2.5)$$

Положим в (2.4) $x = y$ и из полученного неравенства вычтем (2.5). В результате имеем $-c\varepsilon > 0$, откуда следует, что $c < 0$. Переписывая (2.4) в виде $-(1/c)f(x) \geq q(x)$ ($x \in K$), получим, что $-(1/c)f \in U_q$. Таким образом, $U_q \neq \emptyset$. Кроме того, в силу (2.5) $-(1/c)f(x) < q(y) + \varepsilon$, откуда ввиду произвольности ε вытекает равенство $q(y) = \inf_{h \in U_q} h(x)$.

Теорема доказана.

Наша задача заключается теперь в описании тех подмножеств пространства X^* , которые можно рассматривать как совокупность всех линейных функционалов, опорных к некоторому суперлинейному функционалу, определенному на K .

4. K -опорные множества. Непустое подмножество U пространства X^* назовем K -опорным, если оно выпукло, замкнуто и, кроме того,

$$U + K^* \subset U, \quad (2.6)$$

$\inf_{h \in U} h(x) > -\infty$ для любого $x \in K$.

Остановимся более подробно на свойстве (2.6). Так как $0 \in K^*$, то для любого множества Ω справедливо включение $\Omega + K^* \supset \Omega$. Таким образом, если множество Ω обладает свойством (2.6), то $U + K^* = U$.

Множество Ω , удовлетворяющее условию $\Omega + L = \Omega$, где L — выпуклый конус, мы будем называть L -устойчивым. Нетрудно проверить, что L -устойчивость множества Ω равносильна тому, что с каждой своей точкой x это множество содержит конус $x + L$ с вершиной в точке x .

Таким образом, условие (2.6) в определении K -опорного множества U означает, что множество U является K^* -устойчивым.

Если U есть K -опорное множество, то для $x \in K$ положим, как и выше,

$$q_U(x) = \inf_{h \in U} h(x). \quad (2.7)$$

Справедливы следующие леммы.

Л е м м а 2.1. Если $q \in Q(K)$, то множество U_q является K -опорным.

Доказательство очевидно.

Лемма 2.2. Если подмножество U пространства X^* является K -опорным, то функционал q_U , определенный на K формулой (2.7), суперлинеен.

Доказательство очевидно.

Лемма 2.3. Пусть U_1 и U_2 суть K -опорные подмножества пространства X^* ; q_{U_1} и q_{U_2} — суперлинейные функционалы, построенные по множествам U_1 и U_2 соответственно с помощью формулы (2.7). Тогда если $U_1 \neq U_2$, то $q_{U_1} \neq q_{U_2}$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что найдется линейный функционал g такой, что $g \in U_1$ и $g \notin U_2$. Так как U_2 выпукло и замкнуто, то, используя теорему отделимости, найдем элемент x пространства X , для которого *) $\inf_{h \in U_2} h(x) > g(x)$.

Покажем, что $x \in K$. Будем считать, что $K \neq X$ (в противном случае наше утверждение очевидно). Если $x \notin K$, то, снова применяя теорему отделимости, найдем линейный функционал f такой, что $f(y) \geq 0$ ($y \in K$), $f(x) < 0$. Пусть $h' \in U_2$. Так как множество U_2 является K^* -устойчивым и $f \in K^*$, то при любом $\lambda > 0$ функционал $h' + \lambda f$ принадлежит U_2 и потому

$$g(x) < \inf_{h \in U_2} h(x) \leq \inf_{\lambda > 0} (h' + \lambda f)(x) = -\infty,$$

что невозможно. Таким образом, $x \in K$. Имеем

$$q_{U_2}(x) = \inf_{h \in U_2} h(x) > g(x) \geq \inf_{h \in U_1} h(x) = q_{U_1}(x),$$

откуда и следует, что $q_{U_2} \neq q_{U_1}$.

Лемма доказана.

Совокупность всех K -опорных подмножеств пространства X^* обозначим через $\Pi Q(K)$. Для $U \in \Pi Q(K)$ положим

$$\varphi(U) = q_U, \quad (2.8)$$

где q_U — функционал, определенный формулой (2.7).

Теорема 2.2. Отображение φ , определенное формулой (2.8), осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами $\Pi Q(K)$ и $Q(K)$.

Доказательство следует из теоремы 2.1 и лемм 2.1—2.3.

*) Мы воспользовались здесь тем, что $X^{**} = X$.

Приведем теперь несколько примеров.

Пример 1. Пусть $X = R^n$, $K = R_+^n$,

$$q(x) = \left(\prod_{i=1}^n x^i \right)^{1/n}.$$

Как было показано при исследовании примера 5 в п. 2 для $x \geq 0$,

$$q(x) = \min_{z \in Z} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^i z^i,$$

где $Z = \{z \in R_+^n \mid \prod_{i=1}^n z^i = 1\}$. Нетрудно проверить, что для всех $x \in R_+^n$

$$q(x) = \inf_{z \in Z} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^i z^i. \quad (2.9)$$

Рассмотрим в пространстве $(R^n)^*$ множество

$$U = \left\{ f \in (R^n)^* \mid \prod_{i=1}^n f^i \geq 1 \right\}.$$

Нетрудно проверить, что множество $\frac{1}{n} U$ является $(R_+^n)^*$ -опорным. Кроме того, как легко следует из (2.9),

$$q(x) = \inf_{f \in \frac{1}{n} U} f(x).$$

Таким образом, $U_q = \frac{1}{n} U$. На рис. 2 заштриховано это множество ($n = 2$). В данном случае U_q совпадает с выпуклым множеством, ограниченным одной из ветвей равнобочной гиперболы.

Пример 2. Пусть $X = R^2$, $K = R_+^2$,

$$q(x) = (\sqrt{x^1} + \sqrt{x^2})^2 \quad (x \in R_+^2)$$

) Выбрав в пространстве $(R^n)^$ естественный базис, мы можем интерпретировать элементы этого пространства как n -членные наборы чисел, т. е. как элементы R^n . Нам, однако, будет удобно различать элементы R^n и $(R^n)^*$. Условимся в дальнейшем i -ую координату функционала f обозначать так же, как и в случае вектора из R^n , через f^i .

(см. пример 4 в п. 2). Функционал f входит в U_q тогда и только тогда, когда для всех $x \in R_+^2$

$$f^1 x^1 + f^2 x^2 \geq (\sqrt{x^1} + \sqrt{x^2})^2.$$

Преобразуя последнее неравенство, получим, что $\frac{1}{2}(f^1 - 1)x^1 + \frac{1}{2}(f^2 - 1)x^2 \geq \sqrt{x^1 x^2}$, т. е. линейный положительный функционал $\left(\frac{1}{2}(f^1 - 1), \frac{1}{2}(f^2 - 1)\right)$ опорен к суперлинейному функционалу

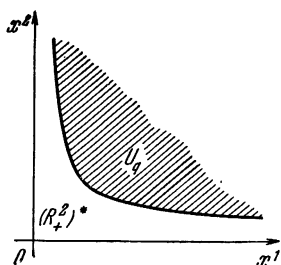


Рис. 2.

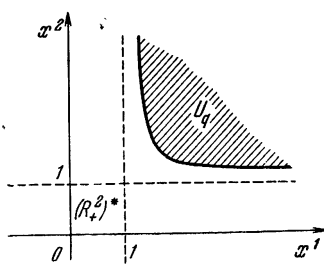


Рис. 3.

$\tilde{q}(x) = \sqrt{x^1 x^2}$. Привлекая результат предыдущего примера, имеем $(f^1 - 1)(f^2 - 1) \geq 1$. Таким образом (рис. 3),

$$U_q = \{f \in (R_+^2)^* \mid (f^1 - 1)(f^2 - 1) \geq 1\}.$$

Пример 3. Пусть $X = R^2$, $K = X$. В этом случае $K^* = \{0\}$. Положим для $x \in X$

$$q(x) = \min(2x^1 + x^2, x^1 + 2x^2). \quad (2.10)$$

Иными словами, $q(x) = \min(f_1(x), f_2(x))$, где $f_1 = (1, 2)$, $f_2 = (2, 1)$.

Нетрудно проверить, что в данном случае U_q совпадает с отрезком $O(f_1, f_2)$, соединяющим точки f_1 и f_2 (рис. 4).

Пример 4. По-прежнему считаем $X = R^2$, $K = R_+^2$, функционал q определен на конусе R_+^2 той же формулой (2.10), что и в примере 3. В этом случае $U_q = O(f_1, f_2) + (R_+^2)^*$ (рис. 5).

Пример 5. Конус K совпадает с верхней полуплоскостью, $X = R^2$, функционал q определен на K формулой (2.10). Множество U_q см. на рис. 6. (Заметим, что в этом случае K^* совпадает с конусом $\{(0, y) \in (R^2)^* \mid y \geq 0\}$.)

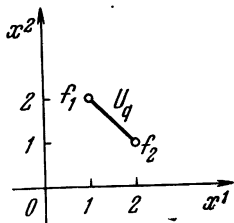


Рис. 4.

Пример 6. Пространство X и функционал q таковы же, что и в предыдущем примере, K совпадает с нижней полуплоскостью; U_q см. на рис. 7.

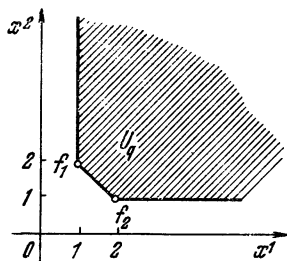


Рис. 5.

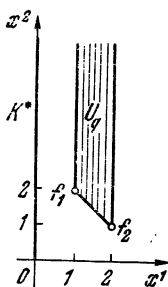


Рис. 6.

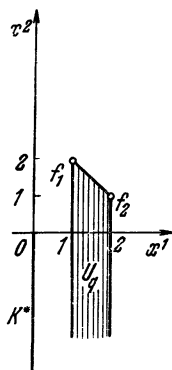


Рис. 7.

5. Функционалы, опорные в точке. Пусть $q \in Q(K)$ где K — выпуклый замкнутый конус в пространстве X . Линейный функционал h называется *опорным в точке* $x \in K$ к функционалу q , если h опорен к q и, кроме того, $h(x) = q(x)$.

Множество всех опорных к q в точке x функционалов обозначим через $(U_q)^x$. Заметим, что это множество, вообще говоря, может быть и пустым. Множество $(U_q)^0$, однако, всегда непусто; действительно, поскольку суперлинейный функционал в нуле обращается в нуль, то $(U_q)^0 = U_q$.

Имеет место

Теорема 2.3. Пусть $q \in Q(K)$, $x_0 \in \text{ri}K$. Тогда множество $(U_q)^{x_0}$ непусто.

Доказательство. 1) Предположим сначала, что K — воспроизводящий конус. В этом случае x_0 — внутренняя точка K . Рассмотрим теперь подграфик $Z = \{(x, \mu) \in X \times R^1 \mid x \in K; \mu \leq q(x)\}$ функционала q . Из условия теоремы следует, что Z — выпуклый телесный замкнутый конус. Так как $(x_0, q(x_0))$ — граничная точка конуса Z , то мы можем провести через эту точку опорную к Z гиперплоскость.

Иными словами, найдется ненулевой функционал (h, ν) из $(X \times R^1)^*$ такой, что

$$h(x_0) + \nu q(x_0) = 0, \quad (2.11)$$

$$h(x) + \nu \mu \leq 0 \quad (x \in K, \mu \leq q(x)). \quad (2.12)$$

Покажем прежде всего, что $\nu \neq 0$. Действительно, в противном случае

$$h(x_0) = 0, \quad h \in -K^*. \quad (2.13)$$

Так как x_0 — внутренняя точка K , то каждый ненулевой линейный функционал, принимающий на K неположительные значения, должен быть в точке x_0 отличным от нуля; таким образом, (2.13) возможно лишь в том случае, когда $h = 0$. Последнее однако, не имеет места, поскольку $(h, \nu) \neq 0$. Предполагая, что $\nu < 0$, получим из (2.12) при $x = 0$

$$0 = h(0) \leq -\nu \mu \quad (\mu \leq q(0) = 0),$$

что невозможно, так как μ принимает отрицательные значения. ■

Таким образом, $\nu > 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $\nu = 1$. В этом случае из (2.12) следует, что

$$q(x) \leq -h(x) \quad (x \in K),$$

т. е. $-h \in U_q$. Кроме того, в силу (2.11) $-h(x_0) = q(x_0)$, и потому $-h \in (U_q^{x_0})$.

2) Если K — невоспроизводящий конус, то рассмотрим аффинную оболочку $L = K - K$ этого конуса и, применяя первую часть теоремы, найдем функционал $\tilde{h} \in L^*$ такой, что $\tilde{h}(x_0) = q(x_0)$ и $\tilde{h}(x) \geq q(x)$ для всех $x \in K$. Ясно, что распространение h функционала \tilde{h} на все X является искомым функционалом.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если $x_0 \notin \text{int } K$, то множество $(U_q)^{x_0}$ может быть и пустым. Примером может служить функционал $q(x) = \sqrt{x^1 x^2}$, определенный на конусе R_+^2 в пространстве R^2 . Легко проверить, что q не имеет опорного ни в одной граничной точке конуса R_+^2 , отличной от нуля.

6. Функционалы, определенные на всем пространстве. Рассмотрим особо случай, когда $K = X$. В этом случае *) $K^* = 0$; кроме того, условие $\inf_{h \in U} h(x) > -\infty$ означает, что множество U ограничено (ибо на этом множестве ограничен любой функционал $x \in (X^*)^* = X$).

Таким образом, как следует непосредственно из определения, множество U является X -опорным тогда и только тогда, когда оно выпукло и компактно. Заметим, что суперлинейный функционал q , определенный на всем пространстве, непрерывен и имеет опорный в каждой точке $x \in X$. Последнее, в частности, означает, что для любого $x \in X$ инфимум в $q(x) = \inf_{h \in U_q} h(x)$ реализуется, т. е.

$$q(x) = \min_{h \in U_q} h(x).$$

7. Сублинейные функционалы. В дальнейшем нам иногда будет удобно рассматривать вместо суперлинейных сублинейные функционалы. Имея это в виду, введем для сублинейных функционалов аналоги некоторых определений и обозначений, приведенных выше.

Линейный функционал h назовем *опорным* к сублинейному функционалу p , определенному на конусе K , если для $x \in K$

$$h(x) \leq p(x).$$

Будем говорить, что h *опорен* к p в точке x_0 , если h опорен к p и $h(x_0) = p(x_0)$.

Множество всех опорных к p (соответственно, опорных к p в точке x) обозначим, так же как и для суперлинейных функционалов, символом U_p (соответственно, $(U_p)^*$); это не приведет к недоразумению, поскольку из контекста всегда будет ясно, о каком функционале идет речь.

Совокупность всех сублинейных функционалов, определенных на K , обозначим через $P(K)$. Приведем аналог теоремы Фенхеля для сублинейных функционалов.

) Отметим здесь несогласованность общепринятых обозначений: символ X^ обозначает и пространство, сопряженное к X , и конус, сопряженный к X (в случае, когда X рассматривается как конус).

Теорема 2.1'. Если $p \in P(K)$, то множество U_p непусто; при этом для любого $x \in K$

$$p(x) = \sup_{h \in U_p} h(x).$$

Непустое подмножество U пространства X^* назовем \mathcal{K} -опорным, если оно выпукло, замкнуто, — K^* -устойчиво и, кроме того, $\sup_{h \in U} h(x) < \infty$. Совокупность всех \mathcal{K} -опорных множеств обозначим через $\Pi P(K)$. Для $U \in \Pi P(K)$ положим

$$\psi(U) = p_U, \quad (2.8')$$

где $p_U(x) = \sup_{h \in U} h(x)$.

Теорема 2.2'. *Отображение ψ , определенное формулой (2.8'), осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами $\Pi P(K)$ и $P(K)$.*

Заметим еще, что сублинейный функционал, определенный на всем пространстве, непрерывен и имеет опорный в каждой точке.

8. Монотонные сублинейные функционалы. Пусть в пространстве X выделен выступающий воспроизводящий конус K . Будем считать, что пространство X упорядочено с помощью конуса K , а пространство X^* с помощью конуса K^* .

Пусть p — сублинейный функционал, определенный на конусе K . Символом U_p^+ обозначим множество всех положительных опорных к p функционалов; иными словами, $U_p^+ = U_p \cap K^*$.

Нетрудно проверить, что U_p^+ непусто тогда и только тогда, когда p принимает на K неотрицательные значения. В самом деле, если $p(x) \geq 0$ для всех $x \in K$, то $0 \in U_p$ и, стало быть, $0 \in U_p^+$, т. е. $U_p^+ \neq \emptyset$; наоборот, если $f \in U_p^+$, то $f(x) \geq 0$ для $x \in K$ и, кроме того, $p(x) \geq f(x)$ ($x \in K$), откуда и следует, что $p(x) \geq 0$.

Теорема 2.1' утверждает, что $p(x) = \sup_{h \in U_p} h(x)$. Нас сейчас интересует, в каком случае можно гарантировать, что для $x \in K$

$$p(x) = \sup_{h \in U_p^+} h(x) \quad (2.14)$$

(разумеется, мы считаем, что p принимает лишь неотрицательные значения).

Введем еще одно определение. Функционал $p \in P(K)$ назовем *монотонным*, если из неравенства *) $x \geq y$ следует, что $p(x) \geq p(y)$.

Если функционал p определяется множеством своих положительных опорных (т. е. для p верно представление (2.14)), то, как нетрудно проверить, p монотонен.

Оказывается, что имеет место и обратное утверждение.

Т е о р е м а 2.4. Пусть p — монотонный сублинейный функционал, определенный на конусе K . Тогда для $x \in K$

$$p(x) = \sup_{h \in U_p^+} h(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из монотонности p следует, что этот функционал принимает на K лишь неотрицательные значения. Мы будем считать, что $p \neq 0$, так как в противном случае теорема очевидна. Положим для $x \in K$

$$p'(x) = \sup_{h \in U_p^+} h(x).$$

Предполагая, что теорема неверна, найдем точку x_0 из K такую, что $p'(x_0) < p(x_0)$. Выберем, далее, число ω так, чтобы выполнялось неравенство

$$p'(x_0) < \omega < p(x_0). \quad (2.15)$$

В пространстве $X \times R^1$ рассмотрим надграфик

$$Z_p = \{(x, \mu) \in X \times R^1 \mid x \in K, \mu \geq p(x)\}$$

функционала p и, кроме того, множество

$$\tilde{Z} = \{(x, \mu) \in X \times R^1 \mid x \in x_0 + K, \mu = \omega\}.$$

Так как $p \in P(K)$, то Z_p — выпуклый замкнутый конус. Ясно, что \tilde{Z} — выпуклое замкнутое множество. Проверим, что Z_p и \tilde{Z} не пересекаются. Предполагая противное, найдем точку (y, κ) из их пересечения. Поскольку $(y, \kappa) \in \tilde{Z}$, то $y \geq x_0$, $\kappa = \omega$. Поскольку $(y, \kappa) \in Z_p$, то $y \in K$, $\kappa \geq p(y)$. Используя монотонность p и привлекая

*) Напомним, что запись $x \geq y$ означает, что $x - y \in K$.

(2.15), имеем $\omega = \kappa \geq p(y) \geq p(x_0) > \omega$, что невозможно. Таким образом, $Z_p \cap \tilde{Z} = \emptyset$.

Применяя теорему отделимости, найдем ненулевой функционал (h, ν) из $(X \times R^1)^*$ такой, что

$$h(x) + \nu\mu \leq 0 \quad (x \in K, \mu \geq p(x)), \quad (2.16)$$

$$h(x) + h(x_0) + \nu\omega \geq 0 \quad (x \in K). \quad (2.17)$$

Из неравенства (2.17) следует, что h ограничен снизу на конусе K и потому принимает на этом конусе лишь неотрицательные значения; таким образом, $h \in K^*$.

Покажем теперь, что $\nu \neq 0$. Действительно, в противном случае получим, используя (2.16), $h(x) \leq 0$ ($x \in K$).

Так как $h \in K^*$, то из последнего неравенства вытекает, что h обращается в нуль на K , и, поскольку K — воспроизводящий конус, h обращается в нуль на X . Последнее, однако, невозможно, так как $(h, \nu) \neq 0$. Нетрудно проверить, что неравенство $\nu > 0$ не реализуется. В самом деле, если $\nu > 0$, то выбрав точку \bar{x} из K , для которой $p(\bar{x}) > 0$ (по предположению, $p \neq 0$), получим $h(\bar{x}) + \nu p(\bar{x}) > 0$. Это соотношение, однако, противоречит неравенству (2.16).

Таким образом, $\nu < 0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\nu = -1$. Из (2.16) следует в этом случае, что $h \in U_p$. Так как, кроме того, $h \in K^*$, то $h \in U_p^+$. С другой стороны, используя (2.15) и (2.17) (при $x = 0$), получим $h(x_0) \geq \omega > p'(x_0)$.

Последнее соотношение противоречит определению функционала p' . Это противоречие и доказывает теорему.

Дальнейшее исследование монотонных сублинейных функционалов опирается на свойства нормальных множеств, к изучению которых мы и приступаем.

9. Нормальные множества. Выпуклое компактное подмножество Ω выступающего воспроизводящего конуса K назовем *нормальным* (в смысле K), если

$$(\Omega - K) \cap K = \Omega.$$

На рис. 8 приведен пример нормального множества ($X = R^2$, $K = R_+^2$, Ω заштриховано, граница множества $\Omega - K$ указана пунктиром).

Важным примером нормального множества является конусный отрезок $\langle 0, x \rangle = \{y \in X \mid 0 \leq y \leq x\}$. Так как

K — выступающий конус, то отрезок $\langle 0, x \rangle$ компактен при любом $x \in K$. Ясно, что

$$(\langle 0, x \rangle - K) \cap K = \langle 0, x \rangle,$$

откуда и следует нормальность множества $\langle 0, x \rangle$.

Имеет место

Предложение 2.1. Выпуклое компактное подмножество Ω конуса K нормально тогда и только тогда, когда с каждой своей точкой x оно содержит конусный отрезок $\langle 0, x \rangle$.

Доказательство.

1) Пусть Ω нормально и $x \in \Omega$. Тогда $x - K \subset \Omega - K$ и потому

$$\begin{aligned} \langle 0, x \rangle &= (x - K) \cap K \subset \\ &\subset (\Omega - K) \cap K = \Omega. \end{aligned}$$

2) Пусть Ω с каждой своей точкой x содержит отрезок $\langle 0, x \rangle$. Для каждого элемента z из множества $(\Omega - K) \cap K$ найдется $y \in \Omega$ такой, что $z \in (y - K) \cap K = \langle 0, y \rangle$. Так как $\langle 0, y \rangle \subset \Omega$, то $z \in \Omega$, т. е. $(\Omega - K) \cap K \subset \Omega$. Обратное включение очевидно.

Предложение доказано.

Следующее предложение описывает важное свойство нормальных множеств.

Предложение 2.2. Пусть Ω — нормальное подмножество конуса K и элемент x этого конуса не принадлежит Ω . Тогда найдется положительный функционал f такой, что

$$f(x) > \sup_{y \in \Omega} f(y).$$

Доказательство. По условию $\Omega = (\Omega - K) \cap K$. Так как $x \in K$ и $x \notin \Omega$, то $x \notin \Omega - K$. Из компактности Ω следует, что множество $\Omega - K$ замкнуто, и потому найдется линейный функционал f такой, что

$$f(x) > \sup_{y \in \Omega - K} f(y). \quad (2.18)$$

Множество Ω содержит нуль и, стало быть, $\Omega - K \supset -K$.

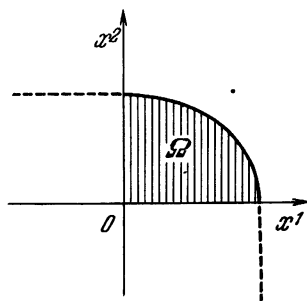


Рис. 8.

Из (2.18) вытекает, в частности, что функционал f ограничен сверху на конусе — K и потому принимает на этом конусе лишь неположительные значения. Последнее означает, что $f \in K^*$. Из (2.18) следует также неравенство $f(x) > \sup_{y \in \Omega} f(y)$.

Предложение доказано.

Напомним, что выпуклое замкнутое множество представимо как пересечение полупространств, его содержащих. Предложение 2.2 показывает, что в подобных терминах может быть охарактеризовано и нормальное множество Ω : оно представимо как пересечение конуса K и всех полупространств вида $\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$, которые содержат Ω и определяются функционалами f из K^* .

Предложение 2.3. Пусть Ω — выпуклый компакт в K . Тогда множество $(\Omega - K) \cap K$ нормально.

Доказательство. Отметим прежде всего, что множество $(\Omega - K) \cap K$ выпукло и замкнуто. Покажем, что это множество ограничено. В самом деле, так как Ω ограничено и K телесен, то найдется точка $x \in K$ такая, что для любого $y \in \Omega$ выполняется $y \leq x$. Но если $z \in (\Omega - K) \cap K$, то $z \leq y$ при некотором $y \in \Omega$ и потому $z \leq x$. Отсюда вытекает, что множество $(\Omega - K) \cap K$ ограничено. Мы показали, таким образом, что это множество является выпуклым компактом.

Пусть теперь $x \in (\Omega - K) \cap K$. Тогда для некоторого элемента $z \in \Omega$ выполняется неравенство $x \leq z$. Если теперь элемент u конуса K таков, что $y \leq x$, то $y \leq z$ и, стало быть, $y \in (\Omega - K) \cap K$. Таким образом, множество $(\Omega - K) \cap K$ с каждой своей точкой x содержит конусный отрезок $\langle 0, x \rangle$. Для завершения доказательства осталось сослаться на предложение 2.1.

Предложение 2.4. Пусть Ω — выпуклый компакт в K . Тогда пересечение всех нормальных множеств, содержащих Ω , совпадает с $(\Omega - K) \cap K$.

Доказательство. В силу предложения 2.3 достаточно проверить, что каждое нормальное множество, содержащее Ω , содержит и $(\Omega - K) \cap K$. Пусть $\tilde{\Omega}$ нормально, $\tilde{\Omega} \supset \Omega$. Тогда $\tilde{\Omega} = (\tilde{\Omega} - K) \cap K \supset (\Omega - K) \cap K$.

Предложение доказано.

Пересечение всех нормальных множеств, содержащих выпуклый компакт Ω , назовем *нормальной оболочкой* Ω

(в смысле K) и обозначим символом $n\Omega$ (на рис. 9 $n\Omega$ заштриховано). Из предложений 2.3 и 2.4 следует, что множество $n\Omega$ нормально и, кроме того, $n\Omega = (\Omega - K) \cap K$.

Следующее предложение описывает важное свойство нормальной оболочки.

Предложение 2.5. Если Ω — выпуклый компакт в K и $f \in K^*$, то $\max_{x \in \Omega} f(x) = \max_{x \in n\Omega} f(x)$.

Доказательство вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$\max_{x \in n\Omega} f(x) \geq \max_{x \in \Omega} f(x) = \max_{x \in \Omega - K} f(x) \geq \max_{x \in (\Omega - K) \cap K} f(x) = \max_{x \in n\Omega} f(x).$$

Предложение доказано.

10. Свойства монотонных сублинейных функционалов.

В этом пункте мы изучим связь между монотонными сублинейными функционалами, определенными на выступающем воспроизводящем конусе K , и нормальными (в смысле K^*) подмножествами конуса K^* . Отметим прежде всего, что имеет место

Предложение 2.6. Пусть подмножество ξ конуса K^* таково, что для любого $x \in K$

$$\sup_{h \in \xi} h(x) < \infty.$$

Тогда ξ ограничено.

Доказательство. Предполагая, что предложение неверно, найдем элемент $x \in X$ такой, что $\sup_{h \in \xi} h(x) = \infty$. Так как K — воспроизводящий конус, то существуют элементы x_i ($i = 1, 2$) из K такие, что $x = x_1 - x_2$; так как $\xi \subset K^*$, то для $h \in \xi$

$$h(x) = h(x_1) - h(x_2) \leq h(x_1)$$

и потому

$$\sup_{h \in \xi} h(x_1) \geq \sup_{h \in \xi} h(x) = \infty,$$

что невозможно.

Предложение доказано.

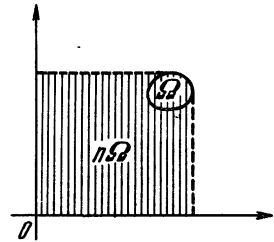


Рис. 9.

Предложение 2.7. Если p — монотонный сублинейный функционал, определенный на K , то множество U_p^+ является выпуклым компактом.

Доказательство. Выпуклость и замкнутость множества U_p^+ очевидны. Ограниченность следует из теоремы 2.4 и предложения 2.6.

Предложение 2.8. Сублинейный функционал p , определенный на конусе K , монотонен тогда и только тогда, когда найдется выпуклый компакт ξ из K^* такой, что

$$p(x) = \max_{h \in \xi} h(x) \quad (x \in K).$$

Доказательство очевидно.

Предложение 2.9. Пусть p — сублинейный функционал представим в виде $p(x) = \max_{h \in \xi} h(x)$, где ξ — выпуклый компакт в K^* . Тогда $U_p^+ = n\xi$, где $n\xi$ — нормальная оболочка ξ в смысле K^* .

Доказательство. Пусть $x \in K$. Рассматривая элемент x как функционал над X^* и учитывая, что этот функционал положителен на конусе K^* , получим, используя предложение 2.5,

$$p(x) = \max_{h \in \xi} h(x) = \max_{h \in n\xi} h(x). \quad (2.19)$$

Рассмотрим теперь множество $n\xi - K^*$. Нетрудно проверить, что это множество выпукло и $(-K^*)$ -устойчиво. Поскольку множество $n\xi$ нормально, то оно компактно, а потому $n\xi - K^*$ замкнуто. Кроме того, в силу (2.19), для $x \in K$

$$\sup_{h \in n\xi - K^*} h(x) = \sup_{h \in n\xi} h(x) = p(x).$$

Из теоремы 2.2' следует, что $n\xi - K^* = U_p$. Так как множество $n\xi$ нормально, то

$$n\xi = (n\xi - K^*) \cap K^* = U_p \cap K^* = U_p^+.$$

Предложение доказано.

Следствие 1. Если p — монотонный сублинейный функционал, определенный на K , то множество U_p^+ нормально.

В самом деле, так как U_p^+ — выпуклый компакт и $U_p^+ \subset K^*$, то, в силу теоремы n ($U_p^+ = U_p^+$).

С л е д с т в и е 2. Если нормальное множество $\xi \subset K^*$ таково, что для сублинейного функционала p , определенного на K , справедливо представление $p(x) = \max_{h \in \xi} h(x)$,

то $\xi = U_p^+$.

Совокупность всех монотонных сублинейных функционалов, определенных на K , обозначим через $P^m(K)$, совокупность всех нормальных подмножеств конуса K^* обозначим через $\Pi P^m(K)$.

Для $U \in \Pi P^m(K)$ положим

$$\chi(U) = p_U \quad (2.20)$$

где $p_U(x) = \max_{h \in U} h(x)$. Ясно, что $p_U \in P^m(K)$.

Т е о р е м а 2.5. *Отображение χ , определенное формулой (2.20), осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\Pi P^m(K)$ и $P^m(K)$.*

Доказательство вытекает из теоремы 2.4 и следствий из предложения 2.9.

11. Полулинейные пространства выпуклых множеств. Выше мы установили, что отображение ϕ , определенное формулой (2.8), определяет взаимно однозначное соответствие между множеством $Q(K)$ всех суперлинейных функционалов, определенных на конусе K , и совокупностью $\Pi Q(K)$ всех K -опорных множеств; отображение ψ , определенное формулой (2.8'), устанавливает взаимно однозначное соответствие между $P(K)$ и $\Pi P(K)$; отображение χ , определенное формулой (2.20), устанавливает взаимно однозначное соответствие между $P^m(K)$ и $\Pi P^m(K)$. Сейчас наша цель заключается в том, чтобы показать, что эти отображения сохраняют алгебраические операции и отношение порядка, иными словами, являются алгебраическими и порядковыми изоморфизмами. Предварительно введем следующее определение.

Полулинейным пространством назовем множество A , в котором введены бинарная операция $+$ и операция умножения на неотрицательное число, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $a + b = b + a$;
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- 3) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;
- 4) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
- 5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;
- 6) $1 \cdot a = a$;

7) существует элемент $0 \in A$ такой, что $0 \cdot a = 0$ для любого $a \in A$.

Нетрудно проверить, что элемент 0 обладает тем свойством, что $a + 0 = a$ для любого $a \in A$.

Естественным образом можно определить изоморфизм двух полулинейных пространств (пространство A изоморфно пространству B , если найдется взаимно однозначное отображение ω пространства A на B такое, что $\omega(a + b) = \omega(a) + \omega(b)$, $\omega(\lambda a) = \lambda \omega(a)$ при $\lambda \geq 0$).

Приведем несколько простых примеров полулинейных пространств.

Пример 1. Выпуклый конус в пространстве X является полулинейным пространством относительно естественным образом определенных операций сложения и умножения на неотрицательное число.

Пример 2. Полулинейные пространства относительно обычных операций сложения и умножения на неотрицательное число образуют

множество всех выпуклых (вогнутых) функций, определенных на данном выпуклом множестве,
множество всех функций, полунепрерывных снизу (сверху) в данной точке,

множества $Q(K)$, $P(K)$, $P^m(K)$.

Пример 3. Пусть K — выпуклый замкнутый конус в пространстве X . Рассмотрим множество $PQ(K)$ всех K -опорных множеств и введем в нем естественным образом операцию умножения на положительное число. Положим также $0 \cdot U = K^*$ для любого $U \in PQ(K)$. Если $U_1, U_2 \in PQ(K)$, то через $U_1 \dot{+} U_2$ обозначим замыкание $\overline{U_1 + U_2}$ алгебраической суммы $U_1 + U_2$ множеств U_1, U_2 . Легко показать, что множество $PQ(K)$ является относительно введенной операции $\dot{+}$ и умножения на неотрицательное число полулинейным пространством (в котором элемент 0 совпадает с конусом K^*).

В частности (при $K = X$), множество всех выпуклых компактов является полулинейным пространством. (В этом случае $0 = K^* = \{0\}$; кроме того, так как алгебраическая сумма компактов компактна, то $U_1 \dot{+} U_2 = U_1 + U_2$ для любых $U_1, U_2 \in PQ(K)$.)

Рассмотрим теперь множество $PP(K)$. Оно превращается в полулинейное пространство, если ввести в нем обычным образом операцию умножения на положительное число, положить $0 \cdot U = -K^*$ ($U \in PP(K)$) и ввести операцию $\dot{+}$ (при этом элемент 0 совпадает с конусом $-K^*$).

Пример 4. Пусть K — воспроизводящий выступающий конус. Рассмотрим совокупность $PP^m(K)$ всех нормальных (в смысле K) подмножеств конуса K и введем в ней естественным образом операцию умножения на неотрицательное число (положив, в частности, $0 \cdot U = \{0\}$ для $U \in PP^m(K)$) и бинарную операцию \oplus , положив

$$U_1 \oplus U_2 = n(U_1 + U_2) \quad (U_1, U_2 \in PP^m(K)).$$

Нетрудно проверить, что относительно таким образом введенных умножения на неотрицательное число и операции \oplus мно-

жество $PR^m(K)$ является полулинейным пространством*). (Мы, как и выше, не останавливаемся на проверке аксиом полулинейного пространства, поскольку осуществляется она стандартным способом; заметим лишь, что проверка ассоциативности несколько громоздка, хотя и элементарна.)

Ниже, рассматривая полулинейные пространства $Q(K)$ и $P(K)$, считаем, что K — выпуклый замкнутый конус; рассматривая $P^m(K)$, считаем, что K — выступающий и воспроизводящий.

В полулинейных пространствах $Q(K)$, $P(K)$ и $P^m(K)$ введем естественным образом отношение порядка (например, для $q_1, q_2 \in Q(K)$ положим $q_1 \geq q_2$, если $q_1(x) \geq q_2(x)$ ($x \in K$)). В пространствах $PR(K)$ и $P^m(K)$ введем отношение порядка по включению, а в $PQ(K)$ по «антивключению» (т. е. положим $U_1 \geq U_2$, если $U_1 \subset U_2$, $U_1, U_2 \in PQ(K)$).

Т е о р е м а 2.6. 1) *Отображение φ , определенное формулой (2.8), является алгебраическим и порядковым изоморфизмом пространств $PQ(K)$ и $Q(K)$.*

2) *Отображение ψ , определенное формулой (2.8'), является алгебраическим и порядковым изоморфизмом пространств $PR(K)$ и $P(K)$.*

3) *Отображение χ , определенное формулой (2.20), является алгебраическим и порядковым изоморфизмом пространств $PR^m(K)$ и $P^m(K)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем лишь третью часть теоремы. Согласно теореме 2.5 отображение χ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $PR^m(K)$ и $P^m(K)$. Очевидно, что

$$\lambda\chi(U) = \chi(\lambda U) \quad (\lambda \geq 0, U \in PR^m(K)).$$

Пусть $U_1, U_2 \in PR^m(K)$. Тогда для $x \in K$

$$\max_{h \in U_1 + U_2} h(x) = \max_{h \in U_1} h(x) + \max_{h \in U_2} h(x).$$

В самом деле, если функционалы $h_1 \in U_1$ и $h_2 \in U_2$ таковы, что $h_i(x) = \max_{h \in U_i} h(x)$ ($i = 1, 2$), то

$$\begin{aligned} \max_{h \in U_1 + U_2} h(x) &= \max_{h' \in U_1, h'' \in U_2} (h'(x) + h''(x)) \geq \\ &\geq h_1(x) + h_2(x) = \max_{h \in U_1} h(x) + \max_{h \in U_2} h(x). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\max_{h' \in U_1, h'' \in U_2} (h'(x) + h''(x)) \leq \max_{h \in U_1} h(x) + \max_{h \in U_2} h(x),$$

*) Если $X = R^n$, $K = R_+^n$, то можно показать, что $U_1 \oplus U_2 = U_1 + U_2$.

откуда и следует наше утверждение. Привлекая теперь предложение 2.5, имеем

$$\begin{aligned} \chi(U_1 \oplus U_2)(x) &= p_{U_1 \oplus U_2}(x) = \max_{h \in U_1 \oplus U_2} h(x) = \max_{h \in n(U_1 + U_2)} h(x) = \\ &= \max_{h \in U_1 + U_2} h(x) = \max_{h \in U_1} h(x) + \max_{h \in U_2} h(x) = \chi(U_1)(x) + \chi(U_2)(x). \end{aligned}$$

Таким образом, χ — алгебраический изоморфизм.

Если $U_1 \supset U_2$, то для $x \in K$

$$\max_{h \in U_1} h(x) \geq \max_{h \in U_2} h(x),$$

т. е. $\chi(U_1) \geq \chi(U_2)$. Пусть теперь $p_{U_1} \geq p_{U_2}$. Тогда каждый функционал, опорный к p_{U_2} , будет опорным к p_{U_1} . Таким образом, $U_{p_{U_1}} \supset U_{p_{U_2}}$, а потому и $U_{p_{U_1}}^+ = U_1 \supset U_2 = U_{p_{U_2}}^+$.

Теорема доказана.

Нетрудно проверить, что каждое из пространств $PP(K)$, $PQ(K)$, $PP^m(K)$ является условно полной структурой (т. е. каждое ограниченное (по порядку) подмножество этих пространств имеет точную верхнюю и нижнюю границы). Пусть, например, семейство $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ элементов пространства $PP(K)$ ограничено сверху, т. е. существует множество $U \subset PP(K)$ такое, что $U \supset U_\alpha$ ($\alpha \in A$). Верхняя грань $\sup_\alpha U_\alpha$ этого семейства совпадает

с множеством $\overline{\bigcup_\alpha U_\alpha}$. Если семейство $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ ограничено снизу (т. е. $U_\alpha \supset U$ при всех α , где $U \in PP(K)$), то $\inf_{\alpha \in A} U_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Из сказанного и теоремы 2.6 следует

Теорема 2.7. *Пространства $P(K)$, $Q(K)$ и $P^m(K)$ являются условно полными структурами.*

Замечание. Нетрудно проверить, что $\sup_{\alpha \in A} p_\alpha$ (где $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ — ограниченное семейство функционалов из $P(K)$ или $P^m(K)$) совпадает с поточечным супремумом (верхней огибающей) этого семейства. Иными словами,

$$\left(\sup_{\alpha \in A} p_\alpha\right)(x) = \sup_{\alpha \in A} (p_\alpha(x)) \quad (x \in K).$$

Если $(q_\alpha)_{\alpha \in A}$ — ограниченное семейство функционалов из $Q(K)$, то $\inf_{\alpha \in A} q_\alpha$ совпадает с поточечным инфимумом (нижней огибающей) этого семейства.

12. Монотонные нормы. В заключение этого параграфа мы рассмотрим некоторые, представляющие в дальнейшем интерес, вопросы, изучение которых опирается на свойства нормальных множеств. Этот пункт посвящен

монотонным нормам. Прежде, чем перейти непосредственно к этим нормам, остановимся на положительных опорных в точке функционалах.

Для монотонного сублинейного функционала, определенного на конусе K , положим $(U_p^+)^x = (U_p)^x \cap K^*$ ($x \in K$). Нам понадобится

Предложение 2.10. Если $p \in P^m(K)$, то 1) p непрерывен, 2) для любого $x \in K$ множество $(U_p^+)^x$ непусто.

Доказательство. Так как $p \in P^m(K)$, то (предложение 2.7) множество U_p^+ является выпуклым компактом, и, стало быть, для любого $x \in X$

$$\max_{h \in U_p^+} h(x) < \infty.$$

Таким образом, функционал \tilde{p} :

$$\tilde{p}(x) = \max_{h \in U_p^+} h(x) \quad (x \in X),$$

определен на всем пространстве и потому (см. п. 6) непрерывен в каждой точке $x \in X$. Так как для $x \in K$

$$\tilde{p}(x) = p(x),$$

то и функционал p непрерывен (в области своего определения).

Из результатов п. 6 и теоремы 2.2 следует, что множество U_p^+ совпадает с совокупностью $U_{\tilde{p}}$ всех линейных функционалов, опорных к \tilde{p} . Снова обращаясь к п. 6, получим, что для любого $x \in K$ существует функционал $h \in U_{\tilde{p}} = U_p^+$ такой, что $h(x) = \tilde{p}(x) = p(x)$. Так как $U_p^+ \subset K^*$, то и $h \in K^*$. Таким образом, $h \in (U_p^+)^x$, т. е. $(U_p^+)^x \neq \emptyset$.

Предложение доказано.

Будем считать, как и выше, что в X введено отношение порядка \geq с помощью конуса K .

Норма $\|\cdot\|$ в пространстве X называется *монотонной* (относительно K), если она обладает следующими свойствами:

1) если $x, y \in K$, $x \geq y$, то $\|x\| \geq \|y\|$,

2) если $x \in X$ и $\|x\| = 1$, то найдутся элементы y и z из K такие, что $x = y - z$, $\|y\| \leq 1$, $\|z\| \leq 1$.

Сужение монотонной нормы на конус K является монотонным сублинейным функционалом.

Нам понадобится следующее

Предложение 2.11. Если норма $\|\cdot\|$ монотонна (относительно K), то для любого $x_0 \in K$ найдется функционал $h \in K^*$ такой, что*) $\|h\| = 1$, $h(x_0) = \|x_0\|$.

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что $\|x_0\| = 1$. Используя предложение 2.10, найдем функционал $h \in K^*$ такой, что

$$h(x_0) = \|x_0\| = 1, \quad h(x) \leq \|x\| \quad (x \in K).$$

Для доказательства предложения достаточно проверить, что $\|h\| = 1$. Если $x \in X$, $\|x\| = 1$, то, используя монотонность нормы $\|\cdot\|$, найдем элементы y и z из K такие, что $x = y - z$, $\|y\| \leq 1$, $\|z\| \leq 1$. Так как $h \in K^*$, то $h(x) = h(y) - h(z) \leq h(y)$ и потому

$$1 = h(x_0) \leq \|h\| = \max_{\|x\|=1} h(x) \leq \max_{y \in K, \|y\| \leq 1} h(y) \leq 1.$$

Таким образом, $\|h\| = 1$ и предложение доказано.

Замечание. Рассуждая так же, как при доказательстве предложения, нетрудно проверить, что для любого $h \in K^*$

$$\|h\| = \max_{y \in K, \|y\| \leq 1} h(y).$$

В самом деле, для любого $x \in X$, $\|x\| = 1$, мы можем найти такой $y \in K$, что $\|y\| \leq 1$ и $h(x) \leq h(y)$. Поэтому

$$\|h\| = \max_{x \in X, \|x\| \leq 1} h(x) \leq \max_{y \in K, \|y\| \leq 1} h(y) \leq \|h\|,$$

откуда и следует требуемое.

Пусть $\|\cdot\|$ — монотонная норма в X , S — единичный шар по этой норме ($S = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$) и $S_K = S \cap K$. Множество S_K с каждым своим элементом x содержит любой элемент y , принадлежащий конусному отрезку $\langle 0, x \rangle$, и потому, как следует из предложения 2.1,

*) Напомним, что, по определению, $\|h\| = \max_{\|x\|=1} h(x)$.

это множество нормально. Кроме того, S_K — телесное множество.

Нетрудно проверить, что, и наоборот, для каждого нормального телесного множества Ω найдется монотонная норма $\|\cdot\|$ такая, что $\Omega = S_K$. Одна из этих норм может быть построена следующим образом. Рассмотрим множество

$$S = \Omega - \Omega.$$

Это множество выпукло, телесно, компактно и симметрично (т. е. с каждой своей точкой x содержит точку $-x$). Из сказанного следует, что функционал Минковского множества S , который мы обозначим символом $\|\cdot\|_\Omega$, является нормой. По определению,

$$\|x\|_\Omega = \inf \{\lambda > 0 \mid x \in \lambda S\} \quad (x \in X).$$

Заметим, что $S = \{x \in X \mid \|x\|_\Omega \leq 1\}$.

Из нормальности Ω легко вытекает равенство

$$\Omega = S_K \quad (2.21)$$

(где $S_K = S \cap K$). В самом деле, включение $\Omega \subset S_K$ очевидно. Если же $x \in S_K$, то $x \geq 0$ и, кроме того, найдутся элементы $y, z \in \Omega$, для которых $x = y - z$. Так как $z \geq 0$, то $y \geq x$ и потому $x \in \Omega$.

Покажем теперь, что норма $\|\cdot\|_\Omega$ монотонна.

1) Пусть $x, y \in K$, $x \geq y$. Не умаляя общности, считаем, что $\|x\| = 1$. Тогда $x \in S \cap K = \Omega$ и, поскольку Ω нормально, $y \in \Omega$. Последнее означает, что $\|y\| \leq 1 = \|x\|$.

2) Пусть $x \in X$, $\|x\| = 1$. Тогда $x \in S$ и, по определению S , найдутся элементы $y, z \in \Omega$ такие, что $x = y - z$. Очевидно, что $\|y\| \leq 1$, $\|z\| \leq 1$.

Таким образом, монотонность нормы $\|\cdot\|$ доказана.

13. Нормальные множества и грани конуса. Пусть K — выступающий воспроизводящий конус в конечномерном пространстве X . Как известно, *гранью* конуса K называется всякое его пересечение Γ с каким-либо непустым множеством гиперплоскостей, обладающее следующим свойством: если $x, y \in K$ и существует внутренняя точка отрезка $[x, y]$, принадлежащая Γ , то и $x, y \in \Gamma$. Непосредственно из определения следует, что грань конуса K является выпуклым замкнутым конусом.

Отметим еще, что для любого $f \in K^*$ множество

$$\Gamma^f = \{x \in K \mid f(x) = 0\} \quad (2.22)$$

является гранью конуса K .

Если Ω — выпуклое подмножество конуса K , не содержащее внутренних точек K , то, как нетрудно проверить, найдется грань этого конуса, содержащая Ω . Действительно, поскольку Ω не пересекается с внутренностью K , то, в силу теоремы отделимости, существует линейный функционал f такой, что

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad (x \in \Omega), \\ f(x) &> 0 \quad (x \in \text{int } K). \end{aligned}$$

Последнее означает, что $f \in K^*$ и $\Omega \subset \Gamma^f$ (где Γ^f определено формулой (2.22)).

Пересечение всех граней конуса, содержащих Ω , также является гранью. Эту грань конуса K назовем *гранью, порожденной множеством Ω* , и обозначим через $\Gamma(\Omega)$.

Как следует непосредственно из определения, подмножество Ω конуса K , содержащее внутреннюю точку этого конуса, не содержится ни в какой грани K . Нам будет удобно считать в дальнейшем, что конус K является своей несобственной гранью. Если $\Omega \subset K$ и $\Omega \cap \text{int } K \neq \emptyset$, то гранью, порожденной Ω , назовем сам конус K (в этом случае $\Gamma(\Omega) = K$). Отметим еще, что $\Gamma(\{0\}) = \{0\}$.

Имеют место следующие простые предложения.

Предложение 2.12. *Множество Ω содержит относительно внутреннюю точку грани $\Gamma(\Omega)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть тот случай, когда $\Omega \neq \{0\}$ и $\Omega \cap \text{int } K = \emptyset$. Положим $L = \Gamma(\Omega) - \Gamma(\Omega)$; конус $\Gamma(\Omega)$ является выступающим и воспроизводящим в пространстве L . Если предложение неверно, то множество Ω содержится в некоторой (собственной) грани Γ конуса $\Gamma(\Omega)$.

Как легко следует из определения, Γ является гранью конуса K и, по определению грани, порожденной множеством, $\Gamma \supset \Gamma(\Omega)$.

Мы получили противоречие, которое и доказывает предложение.

Предложение 2.13. Пусть $\Omega \subset K$ и $L(\Omega)$ — линейная оболочка грани $\Gamma(\Omega)$, порожденной множеством Ω . Тогда $K \cap L(\Omega) = \Gamma(\Omega)$.

Доказательство. Так как $K \supset \Gamma(\Omega)$ и $L(\Omega) \supset \Gamma(\Omega)$, то и $K \cap L(\Omega) \supset \Gamma(\Omega)$.

Докажем обратное включение. Пусть $x \in K \cap L(\Omega)$ и $y \in \text{ri } \Gamma(\Omega)$. Тогда найдется число $\alpha \in [0, 1]$, при котором $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \Gamma(\Omega)$. Так как $x, y \in K$, то, используя определение грани, получим отсюда, что $x \in \Gamma(\Omega)$. Таким образом, $K \cap L(\Omega) \subset \Gamma(\Omega)$.

Предложение доказано.

Пусть Ω — выпуклое компактное подмножество K . Так как Ω входит в конус $\Gamma(\Omega)$, то имеет смысл говорить о нормальной оболочке $\bar{n}\Omega$ компакта Ω в смысле $\Gamma(\Omega)$; так как $\Omega \subset K$, то имеет смысл говорить о нормальной оболочке $n\Omega$ этого компакта в смысле K .

Предложение 2.14. Пусть Ω — выпуклый компакт в K . Тогда $\bar{n}\Omega = n\Omega$, где $\bar{n}\Omega = (\Omega - \Gamma(\Omega)) \cap \Gamma(\Omega)$, $n\Omega = (\Omega - K) \cap K$.

Доказательство. Так как $\Omega - K \supset \Omega - \Gamma(\Omega)$ и $K \supset \Gamma(\Omega)$, то $n\Omega \supset \bar{n}\Omega$.

Докажем обратное включение. Прежде всего покажем, что

$$n\Omega \subset \Gamma(\Omega). \quad (2.23)$$

Пусть $x \in n\Omega = (\Omega - K) \cap K$. Тогда $x = u - v$, где $u \in \Omega$, $v \in K$. Учитывая, что $\frac{1}{2}u \in \Gamma(\Omega)$, $\frac{1}{2}v \in K$, $\frac{1}{2}x \in K$, и привлекая определение грани, получим из формулы $\frac{1}{2}u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}v$, что $\frac{1}{2}x \in \Gamma(\Omega)$. Таким образом, $x \in \Gamma(\Omega)$ и включение (2.23) доказано.

Возьмем снова элемент x из $n\Omega$ и представим его в виде $x = u - v$, где $u \in \Omega$, $v \in K$. Так как $u \in \Omega \subset L(\Omega)$, $x \in n\Omega \subset L(\Omega)$, то и $v = u - x \in L(\Omega)$ (здесь, как и выше, $L(\Omega) = \Gamma(\Omega) - \Gamma(\Omega)$). Поскольку, кроме того, $v \in K$, то, применяя предложение 2.13, получим

$$v \in L(\Omega) \cap K = \Gamma(\Omega).$$

Таким образом, $x = u - v \in \Omega - \Gamma(\Omega)$ и, стало быть, $n(\Omega) \subset \Omega - \Gamma(\Omega)$. Из формулы (2.23) теперь следует, что $n(\Omega) \subset \bar{n}\Omega$.

Предложение доказано.

Опишем теперь грань, порожденную выпуклым компактом Ω , в терминах нормальной оболочки Ω .

Предложение 2.15. Если Ω — выпуклый компакт в K , то $\Gamma(\Omega) = Co(n\Omega)$, где $Co(n\Omega)$ — коническая оболочка нормальной оболочки множества Ω .

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала случай, когда Ω нормально и содержит внутреннюю точку x конуса K .

Покажем, что в этом случае

$$Co(\Omega) = K = \Gamma(\Omega).$$

В самом деле, поскольку $x \in \text{int } K$, то для любого $y \in K$ найдется число $\mu > 0$ такое, что $\mu y \leq x$. Так как Ω нормально, то $\mu y \in \Omega$ и, стало быть, $y \in \frac{1}{\mu} \Omega \subset Co(\Omega)$. Таким образом, $K \subset Co(\Omega)$; обратное включение очевидно.

2) Пусть теперь Ω — произвольное нормальное подмножество K . В силу предложения 2.12 $\Omega \cap (\text{ri } \Gamma(\Omega)) \neq \emptyset$; кроме того, как следует из предложения 2.14, Ω нормально в смысле $\Gamma(\Omega)$; поэтому, привлекая первую часть доказательства, получим, что и в этом случае $\Gamma(\Omega) = Co(\Omega)$.

3) Пусть теперь Ω — произвольный выпуклый компакт. Из сказанного выше следует, что для доказательства предложения достаточно проверить равенство $\Gamma(\Omega) = \Gamma(n\Omega)$. Поскольку $n\Omega \supset \Omega$, то и $\Gamma(n\Omega) \supset \Gamma(\Omega)$. С другой стороны, поскольку $n\Omega \subset \Gamma(\Omega)$ (см. предложение 2.14), то и $\Gamma(n\Omega) \subset \Gamma(\Omega)$. Таким образом, $\Gamma(\Omega) = \Gamma(n\Omega) = Co(n\Omega)$.

Предложение доказано.

§ 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТОЧЕЧНО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Точечно-множественные отображения. Рассмотрим некоторое множество Ω . Совокупность всех непустых подмножеств Ω обозначим через $\Pi(\Omega)$.

Рассмотрим теперь два множества: Ω_1 и Ω_2 , а также отображение a множества Ω_1 в $\Pi(\Omega_2)$. Это отображение будем называть *точечно-множественным*. Для $\xi \in \Pi(\Omega_1)$ положим $a(\xi) = \bigcup_{x \in \xi} a(x)$.

На множестве $a(\Omega_1)$ можно определить отображение a^{-1} , обратное a :

$$a^{-1}(y) = \{x \in \Omega_1 \mid y \in a(x)\} \quad (y \in a(\Omega_1)).$$

Очевидно, что $a^{-1}(a(\Omega_1)) = \Omega_1$ и, кроме того, $(a^{-1})^{-1} = a$.

Графиком отображения a множества Ω_1 в $\Pi(\Omega_2)$ называется подмножество Z прямого произведения $\Omega_1 \times \Omega_2$, определяемое следующим образом:

$$Z = \{(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \mid x \in \Omega_1, \quad y \in a(x)\}.$$

(Точнее говоря, множество Z является графиком бинарного отношения R , которое определяется так: xRy , тогда и только тогда, когда $y \in a(x)$. Мы, однако, допуская вольность речи, будем называть это множество графиком самого отображения a .)

Как следует непосредственно из определений, график Z^{-1} отображения a^{-1} , обратного a , имеет следующий вид:

$$Z^{-1} = \{(y, x) \in a(\Omega_1) \times \Omega_1 \mid (x, y) \in Z\}. \quad (3.1)$$

Заметим, что всякое подмножество Z прямого произведения $\Omega_1 \times \Omega_2$, обладающее тем свойством, что *) $\text{Pr}_1 Z = \Omega_1$, можно рассматривать как график некоторого отображения a множества Ω_1 в $\Pi(\Omega_2)$; а именно: для $x \in \Omega_1$

$$a(x) = \{y \in \Omega_2 \mid (x, y) \in Z\}.$$

Рассмотрим теперь отображения $a_1: \Omega_1 \rightarrow \Pi(\Omega_2)$ и $a_2: \Omega_2' \rightarrow \Pi(\Omega_3)$, где $\Omega_2' \supset \Omega_2$. Произведением отображений a_1 и a_2 называется отображение $a_2 \circ a_1$ множества Ω_1 в $\Pi(\Omega_3)$, определенное формулой $a_2 \circ a_1(x) = a_2(a_1(x))$. Нетрудно убедиться в том, что

$$(a_2 \circ a_1)^{-1} = a_1^{-1} \circ a_2^{-1}. \quad (3.2)$$

Если $\Omega_2 \subset \Omega_1$, то имеет смысл говорить о степенях отображения a . По определению, $a^t = a \circ a^{t-1}$ ($t = 2, 3, \dots$). Из (3.2) следует, что $(a^t)^{-1} = (a^{-1})^t$.

Приведем простой пример.

*) Если Z — подмножество прямого произведения $\Omega_1 \times \Omega_2$, то, по определению, первая проекция $\text{Pr}_1 Z$ множества Z состоит из всех элементов $x \in \Omega_1$, для которых найдется $y \in \Omega_2$ такой, что $(x, y) \in Z$. Аналогично определяется вторая проекция $\text{Pr}_2 Z$ множества Z .

Пример. Пусть $\Omega_1 = \Omega_2 = R_+^1$. Отображение a определено следующим образом: $a(\lambda) = [0, \lambda]$ ($\lambda \in R_+^1$). Так как $a(R_+^1) = R_+^1$, то отображение a^{-1} определено на всей неотрицательной полуоси. Для $\mu \in R_+^1$

$$a^{-1}(\mu) = \{\lambda \mid \mu \in [0, \lambda]\} = [\mu, +\infty).$$

График Z отображения a изображен на рис. 10, график Z^{-1}

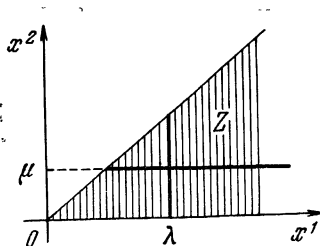


Рис. 10.

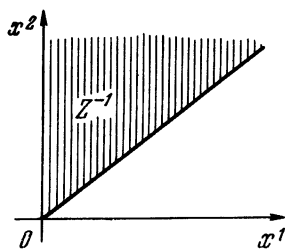


Рис. 11.

отображения a^{-1} — на рис. 11. Для $\lambda \in R_+^1$ имеем

$$a^2(\lambda) = a(a(\lambda)) = a([0, \lambda]) = [0, \lambda],$$

т. е. $a^2 = a$. Для всех натуральных t

$$a^t = a.$$

Найдем теперь $(a^{-1})^t$. Имеем

$$(a^{-1})^t(\lambda) = (a^t)^{-1}(\lambda) = a^{-1}(\lambda) \quad (\lambda \in R_+^1),$$

т. е. $a^{-t} = a^{-1}$ ($t = 2, 3, \dots$). Определим, наконец, $a \circ a^{-1}$. Пусть $\mu \in R_+^1$. Тогда

$$(a \circ a^{-1})(\mu) = a(a^{-1}(\mu)) = a([\mu, +\infty)) = \bigcup_{v \geq \mu} a(v) = R_+^1.$$

Таким образом, отображение $a \circ a^{-1}$ сопоставляет каждой точке λ всю полуось R_+^1 .

2. Замкнутые отображения. Будем теперь считать, что Ω_1 и Ω_2 суть подмножества конечномерных векторных пространств X_1 и X_2 соответственно, причем в пространствах X_i ($i = 1, 2$) введены каким-то образом нормы.

Отображение a множества Ω_1 в $\Pi(\Omega_2)$ назовем *замкнутым* (или *полунепрерывным сверху*), если график Z этого отображения замкнут. В терминах последователь-

ностей замкнутость отображения означает следующее: если (x_n) — последовательность элементов Ω_1 , $x_n \rightarrow x$, $y_n \in a(x_n)$, $y_n \rightarrow y$, то $x \in \Omega$, $y \in a(x)$. Заметим, что из замкнутости отображения a , определенного на множестве Ω_1 , вообще говоря, не следует замкнутость Ω_1 .

Приведем простой пример, подтверждающий это обстоятельство.

Пример 1. Пусть $X_1 = X_2 = R^1$, $\Omega_1 = \Omega_2 = (0, +\infty)$,

$$a(x) = \left[\frac{1}{x}, +\infty \right) \quad (x > 0).$$

Графиком отображения a является множество

$$Z = \{(x, y) \in R_+^1 \times R_+^1 \mid xy \geq 1\}.$$

Отображение a замкнуто, в то время как Ω_1 не замкнуто.

Из формулы (3.1) немедленно следует, что замкнутость отображений a и a^{-1} эквивалентна.

Введем теперь определение замыкания отображения. Если a — отображение множества Ω_1 в $\Pi(\Omega_2)$, то *замыканием* этого отображения назовем отображение \bar{a} , график которого \bar{Z} совпадает с замыканием графика Z отображения a . Заметим, что, замыкая некоторое отображение, мы можем, вообще говоря, расширить его область определения.

В дальнейшем будем считать, что множество Ω_1 замкнуто. Отметим некоторые простые свойства замкнутых отображений.

Предложение 3.1. Пусть $a: \Omega_1 \rightarrow \Pi(\Omega_2)$ — замкнутое отображение, ξ — компактное подмножество Ω_1 . Тогда множество $a(\xi)$ замкнуто.

Доказательство. Пусть $y_n \in a(\xi)$ ($n = 1, 2, \dots$), $y_n \rightarrow y$. Пусть, далее, x_n — произвольный элемент множества $a^{-1}(y_n) \cap \xi$. Не умаляя общности, можно считать, что последовательность (x_n) сходится, и пусть $x = \lim x_n$. Из определения замкнутого отображения теперь следует, что $y \in a(x)$ и, стало быть, $y \in a(\xi)$.

Предложение доказано.

Следствие. Если a — замкнутое отображение, то для любого $x \in \Omega_1$ множество $a(x)$ замкнуто.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что утверждение, обратное следствию, вообще говоря, неверно. Приведем соответствующий пример.

Пример 2. Пусть $X_1 = X_2 = R^1$, $\Omega_1 = \Omega_2 = R_+^1$,

$$a(x) = \begin{cases} [0, 1], & x \neq 0, \\ \{0\}, & x = 0. \end{cases}$$

При любом x множество $a(x)$ замкнуто, но тем не менее отображение a не замкнуто. Его замыкание, отображение \bar{a} , как нетрудно проверить, имеет вид

$$\bar{a}(x) = [0, 1] \text{ для всех } x \in R_+^1.$$

Замечание 2. Если a — замкнутое отображение, то образ замкнутого множества, вообще говоря, не обязан быть замкнутым, а образ компакта не обязан быть компактом (даже если множества $a(x)$ компактны при всех x). Приведем примеры.

Пример 3. Пусть $X_1 = X_2 = R^1$, $\Omega_1 = [1, +\infty)$, $\Omega_2 = R_+^1$, $a(x) = \left[\frac{1}{x}, 1 \right]$. Отображение a замкнуто; в то же время образ $a(\Omega_1)$ замкнутого множества Ω_1 не замкнут.

Пример 4. Пусть $X_1 = X_2 = R^1$, $\Omega_1 = \Omega_2 = R_+^1$,

$$a(x) = \begin{cases} \{0\} & x = 0, \\ \left[-\frac{1}{x}, \frac{1}{x} + 1 \right], & x \neq 0. \end{cases}$$

Отображение a замкнуто, но образ компакта $[0, 1]$ не компактен, хотя при всех $x \in \Omega_1$ множества $a(x)$ компактны.

Отображение a назовем *ограниченным*, если оно переводит ограниченные множества в ограниченные. Имеет место:

Предложение 3.2. Пусть $a_1: \Omega_1 \rightarrow \Pi(\Omega_2)$ и $a_2: \Omega_2 \rightarrow \Pi(\Omega_3)$ — замкнутые отображения (здесь $\Omega_2' \supset \supset \Omega_2$); пусть, далее, отображение a_1 ограничено. Тогда отображение $a_2 \circ a_1$ замкнуто.

Доказательство. Рассмотрим последовательности (x_n) и (z_n) , где $x_n \in \Omega_1$, $x_n \rightarrow x$, $z_n \in a_2 \circ a_1(x_n)$, $z_n \rightarrow z$. Для доказательства предложения надо проверить, что $z \in a_2 \circ a_1(x)$. Для каждого n найдем элемент y_n множества $a_1(x_n)$ такой, что $z_n \in a_2(y_n)$. Из ограниченности a_1 следует, что последовательность (y_n) ограничена, и потому, не умаляя общности, можно считать, что эта последовательность сходится, скажем, к элементу y . Из замкнутости отображений a_1 и a_2 следует, что $y \in a_1(x)$ и $z \in a_2(y)$, т. е. $z \in a_2 \circ a_1(x)$.

Предложение доказано.

З а м е ч а н и е. Следующий пример показывает, что произведение двух замкнутых отображений, вообще говоря, не обязано быть замкнутым.

П р и м е р 5. Пусть $X_1 = X_2 = X_3 = R^1$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_2' = \Omega_3 = R_+^1$,

$$a_1(x) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{x} \right\}, & x \neq 0, \\ \{0\}, & x = 0, \end{cases} \quad a_2(x) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{x} \right\}, & x \neq 0, \\ \{1\}, & x = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что отображения a_1 и a_2 замкнуты, однако отображение $a_2 \circ a_1$:

$$a_2 \circ a_1(x) = \begin{cases} \{x\}, & x \neq 0, \\ \{1\}, & x = 0 \end{cases}$$

не замкнуто.

П р е д л о ж е н и е 3.3. Пусть Ω_1 — замкнутое подмножество пространства X_1 , Ω_2 — подмножество пространства X_2 и $a: \Omega_1 \rightarrow \Pi(\Omega_2)$ — замкнутое ограниченное отображение. Тогда если f — непрерывный на Ω_2 функционал, то функционал u_f

$$u_f(x) = \max_{z \in a(x)} f(z) \quad (x \in \Omega_1),$$

полунепрерывен сверху *).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем прежде всего, что определение функционала u_f корректно (т. е. функционал f действительно достигает максимума на множестве $a(x)$). Для этого достаточно заметить, что, как вытекает из условия предложения и следствия из предложения 3.1, множество $a(x)$ компактно при любом $x \in \Omega_1$.

Рассмотрим теперь последовательность (x_n) элементов множества Ω , и пусть $x_n \rightarrow x$. Выберем элемент $y_n \in a(x_n)$ так, чтобы $f(y_n) = u_f(x_n)$. По условию, множество $a(\bigcup_n x_n)$ ограничено, и потому из последовательности (y_n) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (y_{nk}) . Пусть $y = \lim y_{nk}$. Из замкнутости a вытекает, что $y \in a(x)$, и потому

$$f(y) \leq \max_{z \in a(x)} f(z) = u_f(x).$$

*) Как отмечалось в начале этого пункта, замкнутые отображения называют также полунепрерывными сверху.

Итак, $\lim u_f(x_{n_k}) = f(y) \leq u_f(x)$. Из сказанного легко следует, что $\overline{\lim} u_f(x_n) \leq u_f(x)$.

Предложение доказано.

3. Теорема Какутани. Замкнутые точечно-множественные отображения играют важную роль при исследовании многих задач математической экономики и теории игр. Это объясняется, в частности, тем, что для указанных отображений справедлива теорема Какутани о неподвижной точке.

Пусть Ω — непустое подмножество конечномерного пространства X и a — отображение множества Ω в $\Pi(\Omega)$. Точка $x_0 \in \Omega$ называется *неподвижной точкой отображения a* , если $x_0 \in a(x_0)$. Имеет место

Теорема 3.1 (С. Какутани). Пусть a — замкнутое отображение выпуклого компакта Ω в $\Pi(\Omega)$, причем для любого $x \in \Omega$ множество $a(x)$ выпукло. Тогда отображение a имеет неподвижную точку.

Доказательство см. Какутани [1], Никайдо [2].

4. Полунепрерывные снизу и непрерывные (по Какутани) отображения. Наряду с полунепрерывными сверху (замкнутыми) отображениями, рассмотрим отображения, полунепрерывные снизу.

Пусть Ω_1 и Ω_2 — подмножества пространств X_1 и X_2 соответственно. Отображение $a: \Omega_1 \rightarrow \Pi(\Omega_2)$ называется *полунепрерывным снизу*, если для любых точек $x \in \Omega_1$ и $y \in a(x)$ и любой последовательности $(x_n)(x_n \rightarrow x, x_n \in \Omega_1 (n = 1, 2, \dots))$ найдется последовательность (y_n) такая, что $y_n \in a(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ и $y_n \rightarrow y$.

Следующий пример поможет читателю уяснить разницу между полунепрерывными снизу и полунепрерывными сверху отображениями.

Пример. Пусть $X_1 = X_2 = R^1, \Omega_1 = \Omega_2 = R^1_+$. Отображение a_1 :

$$a_1(x) = \begin{cases} [0, 2], & x \neq 0, \\ [0, 1], & x = 0, \end{cases}$$

полунепрерывно снизу, но не полунепрерывно сверху. Отображение a_2 :

$$a_2(x) = \begin{cases} [0, 2], & x \neq 0, \\ [0, 3], & x = 0, \end{cases}$$

полунепрерывно сверху, но не полунепрерывно снизу.

Имеет место

Предложение 3.4. Если каждое из отображений $a_1: \Omega_1 \rightarrow \Pi(\Omega_2)$ и $a_2: \Omega_2' \rightarrow \Pi(\Omega_3)$ (здесь $\Omega_2' \supset \Omega_2$) полунепрерывны снизу, то и отображение $a_2 \circ a_1$ полунепрерывно снизу.

Доказательство. Пусть $z \in a_2 \circ a_1(x)$ и (x_n) — последовательность, стремящаяся к x . Нам надо указать последовательность (z_n) такую, что $z_n \rightarrow z$ и $z_n \in a_2 \circ a_1(x)$ ($n = 1, 2, \dots$). Так как $z \in a_2(a_1(x))$, то найдется элемент y , для которого выполняются соотношения $z \in a_2(y)$, $y \in a_1(x)$. Используя полунепрерывность снизу отображения a_1 , найдем последовательность (y_n) , обладающую тем свойством, что $y_n \rightarrow y$ и $y_n \in a_1(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). Используя, далее, полунепрерывность снизу отображения a_2 , найдем последовательность (z_n) , стремящуюся к z и такую, что $z_n \in a_2(y_n)$. Очевидно, что (z_n) — искомая последовательность.

Предложение доказано.

Предложение 3.5. Пусть $a: \Omega_1 \rightarrow \Pi(\Omega_2)$ полунепрерывное снизу ограниченное отображение. Тогда если f — непрерывный на Ω_1 функционал, то и функционал $u_f: x \rightarrow \sup_{y \in a(x)} f(y)$ полунепрерывен снизу.

Доказательство. Пусть $x \in \Omega_1$ и (x_n) — последовательность точек из Ω_1 , стремящаяся к x . Найдем точку $y \in a(x)$, для которой выполняется неравенство $u_f(x) \leq f(y) + \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число.

Воспользовавшись теперь полунепрерывностью снизу отображения a , найдем последовательность (y_n) такую, что $y_n \rightarrow y$, $y_n \in a(x_n)$. Так как $u_f(x_n) \geq f(y_n)$, то

$$\underline{\lim} u_f(x_n) \geq \lim f(y_n) = f(y) \geq u_f(x) - \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε имеем $\underline{\lim} u_f(x_n) \geq u_f(x)$, что и доказывает предложение.

Пусть Ω_1 — замкнутое подмножество пространства X_1 , Ω_2 — подмножество пространства X_2 . Отображение $a: \Omega_1 \rightarrow \Pi(\Omega_2)$ назовем *непрерывным по Какутани*, если оно одновременно замкнуто (полунепрерывно сверху) и полунепрерывно снизу.

Из предположений 3.2 и 3.4 следует

Предложение 3.6. Если каждое из отображений $a_1: \Omega_1 \rightarrow \Pi(\Omega_2)$ и $a_2: \Omega'_2 \rightarrow \Pi(\Omega_3)$ (здесь $\Omega'_2 \supset \Omega_2$) непрерывны, причем a_1 ограничено, то и отображение $a_2 \circ a_1$ непрерывно.

Из предложений 3.3 и 3.5 вытекает

Предложение 3.7. Пусть $a: \Omega_1 \rightarrow \Pi(\Omega_2)$ — непрерывное ограниченное отображение. Тогда если f — непрерывный на Ω_1 функционал, то функционал $u_f: x \rightarrow \max_{y \in a(x)} f(y)$ непрерывен.

5. Метрика Хаусдорфа. Пусть a — отображение множества Ω_1 в $\Pi(\Omega_2)$, где Ω_1 и Ω_2 замкнуты. Обозначим через $\tilde{\Pi}(\Omega)$ совокупность всех компактных подмножеств замкнутого множества Ω и предположим, что $a(\xi) \in \tilde{\Pi}(\Omega_2)$ для любого $\xi \in \tilde{\Pi}(\Omega_1)$. В этом случае можно рассматривать a как (однозначный) оператор из $\tilde{\Pi}(\Omega_1)$ в $\tilde{\Pi}(\Omega_2)$ и, введя в множества $\tilde{\Pi}(\Omega_1)$ и $\tilde{\Pi}(\Omega_2)$ топологию, определить непрерывность a обычным образом (как непрерывность однозначной функции).

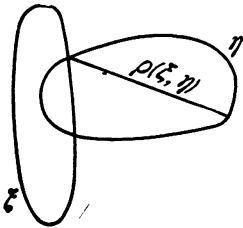


Рис. 12.

Для того чтобы реализовать эту программу, нам понадобится ввести топологию в совокупность компактов. Мы сделаем это с помощью так называемой метрики Хаусдорфа.

Пусть X — конечномерное пространство, в котором введена некоторая норма, S — единичный шар пространства X , т. е. $S = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$, Ω — замкнутое множество в X . Для $\xi, \eta \in \tilde{\Pi}(\Omega)$ положим

$$\rho(\xi, \eta) = \inf \{t \geq 0 \mid \xi \subset \eta + tS, \eta \subset \xi + tS\}. \quad (3.3)$$

Нетрудно проверить, что число $\rho(\xi, \eta)$ удовлетворяет следующему соотношению (рис. 12):

$$\rho(\xi, \eta) = \max_{y \in \eta} (\max_{x \in \xi} \rho(x, y)), \quad \max_{x \in \xi} \rho(x, \eta). \quad (3.4)$$

Проверим, что функция ρ , определенная на $\tilde{\Pi}(\Omega) \times \tilde{\Pi}(\Omega)$ формулой (3.3), удовлетворяет аксиомам метрики:

1) $\rho(\xi, \eta) \geq 0$; $\rho(\xi, \eta) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = \eta$. В самом деле, если $\xi = \eta$, то равенство $\rho(\xi, \eta) = 0$ очевидно. Если же $\rho(\xi, \eta) = 0$, то, используя (3.4), получим, что $\xi = \eta$.

2) $\rho(\xi, \eta) = \rho(\eta, \xi)$. Это равенство очевидно.

3) $\rho(\xi, \zeta) \leq \rho(\xi, \eta) + \rho(\eta, \zeta)$. Действительно, полагая $u = \rho(\xi, \eta)$ и $v = \rho(\eta, \zeta)$, получим из (3.3), используя компактность множеств ξ, η и ζ , что

$$\begin{aligned}\xi &\subset \eta + uS, & \eta &\subset \zeta + vS, \\ \eta &\subset \xi + uS, & \zeta &\subset \eta + vS,\end{aligned}$$

откуда

$$\xi \subset \zeta + (u + v)S, \quad \zeta \subset \xi + (u + v)S.$$

Снова привлекая (3.3), имеем

$$\rho(\xi, \zeta) \leq u + v = \rho(\xi, \eta) + \rho(\eta, \zeta),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, функция ρ является метрикой. Обычно ее называют *метрикой Хаусдорфа*. Свойства метрики Хаусдорфа описаны, например, в книге Хадвигера [1]. Мы отметим (без доказательства) справедливость следующей замечательной теоремы.

Т е о р е м а 3.2 (В. Б л я ш к е). *Если множество Ω компактно, то пространство $\tilde{\Pi}(\Omega)$, снабженное метрикой Хаусдорфа, также компактно.*

Приведем также следующее

П р е д л о ж е н и е 3.8. *Пусть последовательность компактов (ξ_n) такова, что $\xi_{n+1} \subset \xi_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Положим $\xi = \bigcap \xi_n$. (Заметим, что $\xi \neq \emptyset$.) Тогда ξ_n стремится к ξ (по метрике Хаусдорфа).*

Предположим теперь, что $\Omega = X$, и рассмотрим подпространство P_c метрического пространства $\tilde{\Pi}(X)$, состоящее из всех выпуклых компактных подмножеств X . Согласно теореме 2.6 P_c как упорядоченное полулинейное пространство изоморфно пространству $P(X^*)$ всех сублинейных функционалов, определенных на X^* . Пусть $U, V \in P_c$. Положим $\rho(U, V) = \alpha$. Тогда, как следует из (3.3),

$$V \subset U + \alpha S, \quad U \subset V + \alpha S,$$

и потому

$$\rho_V \leq \rho_U + \alpha \rho_S, \quad \rho_U \leq \rho_V + \alpha \rho_S. \quad (3.5)$$

(Напомним, что если $W \in \Pi_c$, то p_W — функционал из $P(X^*)$, определенный формулой $p_W(f) = \max_{x \in W} f(x)$.) Из неравенств (3.5) вытекает, что для всех $f \in X^*$

$$|p_U(f) - p_V(f)| \leq \alpha p_S(f).$$

Заметим теперь, что

$$p_S(f) = \max_{x \in S} f(x) = \max_{\|x\| \leq 1} f(x) = \|f\|.$$

Итак,

$$\frac{|p_U(f) - p_V(f)|}{\|f\|} \leq \alpha = \rho(U, V) \quad (f \neq 0)$$

и потому

$$\max_{f \in X^*, f \neq 0} \frac{|p_U(f) - p_V(f)|}{\|f\|} \leq \rho(U, V). \quad (3.6)$$

Покажем, что в формуле (3.6) на самом деле реализуется равенство. Действительно, если

$$\max_{f \in X^*, f \neq 0} \frac{|p_U(f) - p_V(f)|}{\|f\|} = \beta < \rho(U, V),$$

то, как нетрудно проверить, $p_V \leq p_U + \beta p_S$, $p_U \leq p_V + \beta p_S$, откуда $V \subset U + \beta S$, $U \subset V + \beta S$. Из определения метрики Хаусдорфа теперь следует, что $\rho(U, V) \leq \beta$, что невозможно. Итак, в формуле (3.6) реализуется равенство. Учитывая это обстоятельство и используя положительную однородность функционалов p_U и p_V , получим

$$\max_{\|f\|=1} |(p_U - p_V)(f)| = \rho(U, V). \quad (3.7)$$

Заметим теперь, что, в силу положительной однородности, сублинейный функционал p полностью определяется своими значениями на единичной сфере $Z^* = \{f \in X^* \mid \|f\| = 1\}$ пространства X^* . Условимся след этого функционала на единичную сферу обозначать той же буквой p , что и сам функционал; полулинейное упорядоченное пространство всех следов сублинейных функционалов на Z^* обозначим тем же символом $P(X^*)$, что и пространство самих функционалов. Приняв эти соглашения, отметим, что $P(X^*)$ содержится в пространстве $C(Z^*)$ всех непрерывных функций, определенных на Z^* ; кроме того, формулу (3.7) можно теперь переписать так:

$$\|p_U - p_V\|_{C(Z^*)} = \rho(U, V).$$

Итак, мы доказали следующее

Предложение 3.9. *Образжение $\varphi: U \rightarrow p_U$ метрического пространства Π_c в подмножество $P(X^*)$ пространства $C(Z^*)$ является изометрией.*

Пусть теперь K — выступающий, воспроизводящий конус в пространстве X . В полулинейном пространстве $PR^m(K)$ всех нормальных подмножеств конуса K введем метрику Хаусдорфа. Монотонный сублинейный функционал ρ , определенный на конусе K^* , отождествим с его следом на пересечение S_{K^*} конуса K^* и единичной сферы Z^* пространства X^* . Полулинейное упорядоченное пространство всех следов на S_{K^*} монотонных сублинейных функционалов обозначим тем же символом $P^m(K^*)$, что и пространство самих функционалов. Из предложения 2.10 следует, что $P^m(K^*)$ содержится в пространстве $C(S_{K^*})$ всех непрерывных на S_{K^*} функций. Рассуждая так же, как и выше, нетрудно проверить, что справедливо

Предложение 3.9. Если норма $\|\cdot\|$ монотонна (см. п. 12 § 2), то отображение $\chi: U \rightarrow P_U$ метрического пространства $PR^m(K^*)$ в подмножество $P^m(K^*)$ пространства $C(S_{K^*})$ является изометрией.

6. Непрерывность по Хаусдорфу. Пусть Ω_1 и Ω_2 — замкнутые множества и $a: \Omega_1 \rightarrow \Pi(\Omega_2)$ — отображение, переводящее каждый компакт в компакт. Будем говорить, что отображение a непрерывно по Хаусдорфу, если из соотношений $\xi_n \in \tilde{\Pi}(\Omega_1)$, $\xi_n \rightarrow \xi$ ($n = 1, 2, \dots$) следует, что $a(\xi_n) \rightarrow a(\xi)$.

Покажем, что отображение a , непрерывное по Хаусдорфу, является непрерывным и по Какутани, т. е. является полунепрерывным и сверху и снизу. Проверим сначала полунепрерывность сверху. Пусть (x_n) — последовательность точек из Ω_1 , $x_n \rightarrow x$, $y_n \in a(x_n)$, $y_n \rightarrow y$. Так как a непрерывно по Хаусдорфу, то $a(x_n) \rightarrow a(x)$, откуда, используя формулу (3.4), получим $\max_{y \in a(x_n)} \rho(y, a(x)) \rightarrow 0$.

Поскольку $y_n \in a(x_n)$, то и $\rho(y_n, a(x)) \rightarrow 0$.

Последнее означает, что $\lim y_n = y \in a(x)$. Итак, a полунепрерывно сверху. Покажем, что это отображение полунепрерывно снизу. Пусть $x \in \Omega_1$, $y \in a(x)$, $x_n \rightarrow x$ ($x_n \in \Omega_1$, $n = 1, 2, \dots$). Нам надо найти последовательность (y_n) такую, что $y_n \in a(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) и $y_n \rightarrow y$. Так как $a(x_n) \rightarrow a(x)$, то $\rho(y, a(x_n)) \rightarrow 0$, откуда следует, что последовательность (y_n) , где $y_n \in a(x_n)$ и $\|y - y_n\| = \rho(y, a(x_n))$, является требуемой.

Таким образом, из непрерывности по Хаусдорфу следует непрерывность по Какутани. Оказывается, что для ограниченных отображений верно обратное утверждение.

Предложение 3.10. Если ограниченное отображение a непрерывно по Какутани, то оно непрерывно и по Хаусдорфу. |

Доказательство. Предположим, что предположение неверно. Тогда существуют компакт $\xi \in \tilde{\Pi}(\Omega_1)$, число $\varepsilon > 0$ и последовательность (ξ_n) ($\xi_n \in \tilde{\Pi}(\Omega_1)$) такая, что $\xi_n \rightarrow \xi$, но $\rho(a(\xi_n), a(\xi)) > \varepsilon$, $n = 1, 2, \dots$. Переходя, если это понадобится, к подпоследовательности, можно считать, не умаляя общности, что реализуется один из двух случаев:

а) $a(\xi_n)$ не содержится в множестве *

$$a(\xi) + \varepsilon S \quad (n = 1, 2, \dots),$$

б) $a(\xi)$ не содержится в множестве

$$a(\xi_n) + \varepsilon S \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим сначала случай а). В этой ситуации существует последовательность (y_n) такая, что $y_n \in a(\xi_n)$, $y_n \notin a(\xi) + \varepsilon S$. Найдем элементы $x_n \in \xi_n$, обладающие тем свойством, что $y_n \in a(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), и покажем, что последовательность (x_n) ограничена. В самом деле, $x_n \in \bigcup_k \xi_k$ ($n = 1, 2, \dots$); поскольку последовательность

(ξ_k) сходится, то она ограничена (в пространстве $\tilde{\Pi}(\Omega_1)$); отсюда, как нетрудно проверить, следует ограниченность множества $\bigcup_k \xi_k$ и, стало быть, последовательности (x_n) .

Не умаляя общности, будем считать, что последовательность (x_n) сходится, скажем, к элементу x . Поскольку $x_n \in \xi_n$ и $\xi_n \rightarrow \xi$, то и $x \in \xi$.

Из сказанного и ограниченности отображения a вытекает, что и последовательность (y_n) ограничена. Переходя, если это потребуется, к подпоследовательности, считаем, что существует $\lim y_n = y$. Напомним теперь, что последовательность (y_n) удовлетворяет соотношениям

$$y_n \in a(x_n), \quad y_n \notin a(\xi) + \varepsilon S.$$

Так как отображение a замкнуто и $x \in \xi$, то первое из этих соотношений влечет включение $y \in a(x) \subset a(\xi)$.

*) Напомним, что $S = \{x \in X_2 \mid \|x\| \leq 1\}$.

Из второго же соотношения следует, что $y \notin a(\xi)$. Полученное противоречие показывает, что случай а) невозможен.

Перейдем к случаю б). В рассматриваемой ситуации существует последовательность (v_n) такая, что $v_n \in a(\xi)$, $v_n \notin a(\xi_n) + \varepsilon S$ ($n = 1, 2, \dots$). Не умаляя общности, считаем, что существует $\lim v_n = v$. В условиях предложения множество $a(\bigcup_n \xi_n) = \bigcup_n a(\xi_n)$ ограничено и потому все множества $a(\xi_n)$ содержатся в некотором компакте. Из теоремы Бляшке следует, что из последовательности $(a(\xi_n))$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Мы будем считать, что сама последовательность $(a(\xi_n))$ сходится, и через η обозначим предел этой последовательности. Так как, по условию,

$$v_n \notin a(\xi_n) + \varepsilon S \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то $v \notin \eta$. Покажем, с другой стороны, что полученное соотношение не имеет места. Для этого найдем элемент $u \in \xi$ такой, что $v \in a(u)$, и рассмотрим последовательность (u_n) , обладающую тем свойством, что $u_n \in \xi_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $u_n \rightarrow u$ (такая последовательность существует, поскольку $\xi_n \rightarrow \xi$). Так как отображение a полунепрерывно снизу, то найдется последовательность (v'_n) такая, что $v'_n \rightarrow v$, $v'_n \in a(u_n) \subset a(\xi_n)$, откуда следует, что $\lim v'_n = v \in \eta = \lim a(\xi_n)$. Итак, случай б) невозможен.

Предложение доказано.

Это предложение позволяет, говоря о непрерывности ограниченных отображений, не уточнять, в каком именно смысле понимается непрерывность.

§ 4. СУПЕРЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ДВОЙСТВЕННЫЕ К НИМ

1. Простейшие свойства точечно-множественных отображений, определенных на конусе. В этом параграфе мы рассматриваем точечно-множественные отображения вида $a: K_1 \rightarrow \Pi(K_2)$, где K_1 и K_2 — выпуклые замкнутые конусы в пространствах X_1 и X_2 соответственно.

Будем говорить, что отображение a конуса K_1 в $\Pi(K_2)$

вогнуто, если

$$a(\alpha x + \beta y) \supset \alpha a(x) + \beta a(y) \\ (\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1; x, y \in K_1),$$

положительно однородно, если

$$a(\lambda x) = \lambda a(x) \quad (\lambda > 0, x \in K_1),$$

супераддитивно, если

$$a(x_1 + x_2) \supset a(x_1) + a(x_2) \quad (x_1, x_2 \in K_1),$$

гейловское, если

$$a(0) = \{0\}.$$

Ниже описываются некоторые простые свойства отображений, определенных на конусе.

Предложение 4.1. Если a — вогнутое отображение и $0 \in a(0)$, то

$$a(\lambda x) \supset \lambda a(x) \quad (\lambda \leq 1, x \in K_1),$$

$$a(\mu x) \subset \mu a(x) \quad (\mu \geq 1, x \in K_1).$$

Доказательство. 1) Если $\lambda \leq 1$, то для $x \in K_1$

$$a(\lambda x) = a(\lambda x + (1 - \lambda)0) \supset \lambda a(x) + (1 - \lambda)a(0) \supset \lambda a(x).$$

2) Пусть $\mu \geq 1$, $x \in K_1$. Положим $y = \mu x$. Тогда

$$a(x) = a\left(\frac{1}{\mu}y\right) \supset \frac{1}{\mu}a(y) = \frac{1}{\mu}a(\mu x).$$

Таким образом, $\mu a(x) \supset a(\mu x)$ и предложение доказано.

Предложение 4.2. 1) Если отображение a вогнуто и положительно однородно, то оно супераддитивно; 2) если a супераддитивно и положительно однородно, то оно вогнуто; 3) если a супераддитивно, вогнуто и $0 \in a(0)$, то a положительно однородно.

Доказательство. Мы остановимся на доказательстве лишь третьего утверждения предложения, поскольку первые два утверждения очевидны. Отметим прежде всего, что из супераддитивности отображения a вытекает соотношение

$$a(nx) \supset na(x) \quad (n — натуральное).$$

Пусть теперь $\mu \geq 1$. Положим $\mu = E(\mu) + \mu'$ (где $E(\mu)$ — целая часть μ , $\mu' < 1$). Имеем, используя супераддитивность и предложение 4.1,

$$a(\mu x) = a(E(\mu)x + \mu'x) \supseteq a(E(\mu)x) + a(\mu'x) \supseteq \\ \supseteq E(\mu)a(x) + \mu'a(x) \supseteq \mu a(x);$$

с другой стороны, снова используя предложение 4.1, получим

$$a(\mu x) \subset \mu a(x).$$

Итак, при $\mu \geq 1$

$$a(\mu x) = \mu a(x).$$

Если же $0 < \mu < 1$, то, полагая $y = \mu x$, имеем

$$a(x) = a\left(\frac{1}{\mu}y\right) = \frac{1}{\mu}a(y) = \frac{1}{\mu}a(\mu x).$$

Таким образом, и в этом случае $a(\mu x) = \mu a(x)$.

Предложение доказано.

Предложение 4.3. Пусть a — супераддитивное отображение и существует элемент x из K_1 такой, что множество $a(x)$ ограничено. Тогда a — гейловское отображение.

Доказательство. Предположим, что предположение неверно и существует элемент y из K_1 ($y \neq 0$) такой, что $y \in a(0)$. Используя супераддитивность a , нетрудно проверить, что для любого натурального n

$$2^n y \in a(0),$$

т. е. $a(0)$ неограничено. Но поскольку $a(x) = a(x+0) \supseteq a(x) + a(0)$, то $a(x)$ также неограничено, что противоречит условию.

Предложение доказано.

Предложение 4.4. 1) Если a — вогнутое отображение, ξ — выпуклое подмножество K_1 , то множество $a(\xi)$ выпукло; если a — положительно однородное отображение, $\xi \in \Pi(K_1)$, ξ — конус, то множество $a(\xi)$ является конусом.

2) Множество Z — график отображения a — выпукло тогда и только тогда, когда отображение a вогнуто; Z является конусом тогда и только тогда, когда a положительно однородно.

Доказательство очевидно.

Следствие. Если a — вогнутое отображение, $x \in K_1$, то множество $a(x)$ выпукло.

Из второй части предложения 4.4 и формулы (3.1) легко вытекает

Предложение 4.5. Пусть множество $a(K_1)$ является конусом. Отображение a вогнуто (соответственно, положительно однородно) тогда и только тогда, когда вогнуто (соответственно, положительно однородно) отображение a^{-1} .

Предложение 4.6. Вогнутое замкнутое гейловское отображение $a: K_1 \rightarrow \Pi(K_2)$ ограничено.

Доказательство этого предложения опирается на следующую простую лемму.

Лемма 4.1. Выпуклое замкнутое подмножество Ω пространства X , содержащее нуль и не содержащее ни одного луча (с вершиной в нуле), ограничено.

Доказательство леммы. На единичной сфере S пространства X рассмотрим функцию α :

$$\alpha(x) = \max \{ \alpha \in R^1 \mid \alpha x \in \Omega \}$$

(по определению, \max пустого множества равен нулю). Из условия следует, что $0 \leq \alpha(x) < \infty$ при всех $x \in S$. Для доказательства леммы достаточно проверить, что $\sup_{x \in S} \alpha(x) < \infty$. Предположим, что $\sup_{x \in S} \alpha(x) = \infty$, и найдем последовательность (x_n) элементов сферы S такую, что $\alpha(x_n) > n$. Не умаляя общности, считаем, что существует $\lim x_n = x$. Пусть N — произвольное натуральное число. Тогда $Nx_n \in \Omega$ при всех $n \geq N$ и, стало быть, $Nx \in \Omega$. Таким образом, Ω содержит луч $(\alpha x)_{\alpha \geq 0}$, что невозможно.

Лемма доказана.

Доказательство предложения 4.6. Покажем сначала, что в условиях предложения образ $a(\xi)$ любого выпуклого компакта ξ является ограниченным множеством. Положим $\tilde{\xi} = \text{co}(\xi \cup \{0\}) = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \lambda \xi$.

Множество $\tilde{\xi}$ является выпуклым компактом и потому (см. предложения 3.1 и 4.4) множество $a(\tilde{\xi})$ выпукло и замкнуто; кроме того, $0 \in a(\tilde{\xi})$. Покажем, что $a(\tilde{\xi})$ не содержит ни одного луча. Предполагая противное,

найдем элемент $u \in K_2$, отличный от нуля и такой, что при всех $\lambda > 0$

$$\lambda u \in a(\tilde{\xi}).$$

Так как a — гейловское вогнутое отображение, то, в силу предложения 4.1, $\frac{1}{\lambda} a(\tilde{\xi}) \subset a\left(\frac{1}{\lambda} \tilde{\xi}\right)$ ($\lambda \geq 1$), и потому при $\lambda \geq 1$

$$u \in a\left(\frac{1}{\lambda} \tilde{\xi}\right).$$

Из сказанного следует, что для любого натурального n найдется элемент x_n из $\tilde{\xi}$, для которого $u \in a\left(\frac{1}{n} x_n\right)$.

Поскольку множество $\tilde{\xi}$ ограничено, то $\frac{1}{n} x_n \rightarrow 0$, и потому, используя замкнутость отображения a , получим, что $u \in a(0)$. Последнее соотношение, однако, невозможно, так как a — гейловское отображение. Мы показали, что множество $a(\tilde{\xi})$ ограничено. Так как $a(\xi) \subset a(\tilde{\xi})$, то и $a(\xi)$ ограничено.

Пусть теперь η — произвольное ограниченное подмножество конуса K_1 . Тогда множество $\xi = \text{co } \eta$ является выпуклым компактом. Поскольку $a(\eta) \subset a(\xi)$, то $a(\eta)$ ограничено. Предложение доказано.

С л е д с т в и е. Если a — вогнутое замкнутое гейловское отображение, $x \in K_1$, то множество $a(x)$ является выпуклым компактом.

П р е д л о ж е н и е 4.7. Пусть $a: K_1 \rightarrow \Pi(K_2)$ — вогнутое отображение, причем $a(K_1) \cap \text{ri } K_2 \neq \emptyset$. Тогда, если $x_0 \in \text{ri } K_1$, то $a(x_0) \cap \text{ri } K_2 \neq \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию, найдется точка x' из K_1 такая, что $a(x') \cap \text{ri } K_2 \neq \emptyset$. Так как $x_0 \in \text{ri } K_1$, то при достаточно малых положительных α элемент $y = \frac{x_0 - \alpha x'}{1 - \alpha}$ входит в K_1 . Имеем

$$a(x_0) = a(\alpha x' + (1 - \alpha)y) \supset \alpha a(x') + (1 - \alpha)a(y).$$

Предложение доказано.

2. Монотонные отображения. Отображение $a: K_1 \rightarrow \Pi(K_2)$ назовем *возрастающим* (соответственно, *убы-*

вающим), если из неравенства *) $x' \geq x''$ ($x', x'' \in K_1$) следует, что $a(x') \supset a(x'')$ (соответственно, $a(x') \subset \subset a(x'')$).

Справедливы следующие простые предложения.

Предложение 4.8. Для того чтобы отображение a возрастало, необходимо и достаточно, чтобы для любого $y \in a(K_1)$ множество $a^{-1}(y)$ было K_1 -устойчиво.

Доказательство очевидно.

Предложение 4.9. Для того чтобы отображение a убывало, необходимо и достаточно, чтобы для любого $y \in a(K_1)$ множество $a^{-1}(y)$ с каждой своей точкой x содержало конусный отрезок $\langle 0, x \rangle = \{x' \in K_1 \mid x' \leq x\}$.

Доказательство очевидно.

Предложение 4.10. Пусть $a: K_1 \rightarrow \Pi(K_2)$ — вогнутое отображение, обладающее теми свойствами, что для любого $x \in K_1$

$$1) 0 \in a(x),$$

2) множество $a(x)$ замкнуто.

Тогда отображение a возрастает.

Доказательство. Пусть $x', x'' \in K_1$, $x' \geq x''$. Тогда для любого $\alpha \in [0, 1)$ выполняется неравенство $x' \geq \alpha x''$, и потому элемент $y_\alpha = \frac{x' - \alpha x''}{1 - \alpha}$ принадлежит конусу K_1 . Учитывая, что, по условию,

$$0 \in a(y_\alpha) \quad (\alpha \in [0, 1)),$$

получим

$$\begin{aligned} a(x') &= a(\alpha x'' + (1 - \alpha)y_\alpha) \supset \alpha a(x'') + (1 - \alpha)a(y_\alpha) \supset \\ &\supset \alpha a(x'') \quad (0 \leq \alpha < 1). \end{aligned}$$

Пусть $y \in a(x'')$. Тогда, как следует из приведенных выше соотношений,

$$\alpha y \in a(x') \quad (\alpha \in [0, 1)).$$

Так как множество $a(x')$ замкнуто, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1-0} \alpha y = y \in a(x').$$

*) Мы считаем, что пространство X_1 упорядочено конусом K_1 . Таким образом, неравенство $x' \geq x''$ означает, что $x' = x'' + y$, где $y \in K_1$.

Таким образом, $a(x'') \subset a(x')$, что и доказывает предложение.

Предложение 4.11. Если a — супераддитивное отображение конуса K_1 в $\Pi(K_2)$, обладающее тем свойством, что $0 \in a(x)$ ($x \in K_1$), то оно возрастает.

Доказательство. Если $x' \geq x''$ ($x', x'' \in K_1$), то

$$a(x') = a(x'' + (x' - x'')) \supset a(x'') + a(x' - x'') \supset a(x'').$$

Предложение доказано.

Замечание. Пусть отображение $a: K_1 \rightarrow \Pi(K_2)$ возрастает и, кроме того, $0 \in a(0)$. Тогда, как нетрудно проверить, для любого $x \in K_1$

$$0 \in a(x).$$

3. Свойства произведения отображений.

Предложение 4.12. Пусть a_1 — отображение конуса K_1 в $\Pi(K_2)$, a_2 — отображение конуса K_2 в $\Pi(K_3)$ (здесь $K_2 \subset K_2'$). Если отображения a_1 и a_2 обладают одним из следующих свойств: вогнутостью, положительной однородностью, супераддитивностью, являются гейловскими, то и отображение $a_2 \circ a_1$ обладает тем же свойством; если отображение a_1 возрастает (соответственно, убывает), то и отображение $a_2 \circ a_1$ возрастает (соответственно, убывает).

Доказательство. Мы рассмотрим лишь тот случай, когда отображения a_1 и a_2 вогнуты, и покажем, что отображение $a_2 \circ a_1$ вогнуто.

Пусть $x', x'' \in K_1$, $\alpha \in [0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} a_2 \circ a_1(\alpha x' + (1 - \alpha)x'') &= \bigcup_{y \in a_1(\alpha x' + (1 - \alpha)x'')} a_2(y) \supset \\ &\supset \bigcup_{y' \in a_1(x'), y'' \in a_1(x'')} (\alpha a_2(y') + (1 - \alpha)a_2(y'')) = \\ &= \alpha \bigcup_{y' \in a_1(x')} a_2(y') + (1 - \alpha) \bigcup_{y'' \in a_1(x'')} a_2(y'') = \\ &= \alpha a_2 \circ a_1(x') + (1 - \alpha) a_2 \circ a_1(x''). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

4. Суперлинейные отображения. В этом пункте определяются суперлинейные отображения, которые представляют собой удобный аппарат для исследования моделей экономической динамики.

Пусть X_1 и X_2 — конечномерные пространства, в которых выделены выступающие воспроизводящие конусы K_1 и K_2 соответственно.

Отображение $a: K_1 \rightarrow \Pi(K_2)$ назовем *суперлинейным*, если оно супераддитивно, положительно однородно, замкнуто, является гейловским и, кроме того, удовлетворяет условию: $a(K_1) \cap (\text{int } K_2) \neq \emptyset$. Совокупность всех суперлинейных отображений $a: K_1 \rightarrow \Pi(K_2)$ обозначим символом $A(K_1, K_2)$. (В этом обозначении не участвуют пространства X_1 и X_2 . В некотором смысле эти пространства однозначно восстанавливаются по конусам K_1 и K_2 .)

Имеет место

Предложение 4.13. *Отображение $a \in A(K_1, K_2)$ является вогнутым и ограниченным.*

Доказательство следует из предложений 4.2 и 4.6.

Следствие. *Суперлинейное отображение переводит каждый компакт в компакт.*

Это утверждение легко следует из предложений 3.1 и 4.13. Для отображения $a \in A(K_1, K_2)$ положим

$$\|a\| = \sup_{x \in K_1, \|x\| \leq 1} \sup_{y \in a(x)} \|y\|. \quad (4.1)$$

Число $\|a\|$, определенное формулой (4.1), будем называть *нормой* отображения a . Из предложения 4.13 вытекает, что $\|a\| < \infty$ для любого суперлинейного отображения a . Заметим, что для любых $x \in K_1$ и $y \in a(x)$ выполняется неравенство $\|y\| \leq \|a\| \|x\|$.

Часто бывает удобно задавать суперлинейное отображение с помощью графика. В связи с этим полезно

Предложение 4.14. *Пусть в пространстве X_2 задан воспроизводящий и выступающий конус K_2 . Точечно-множественное отображение a , график которого Z лежит в прямом произведении $X_1 \times X_2$, входит в $A(K_1, K_2)$, где $K_1 = \text{Pr}_1 Z$, тогда и только тогда, когда Z — замкнутый выпуклый конус, обладающий следующими свойствами *):*

$$(0, y) \notin Z \text{ при } y \neq 0, \quad \text{Pr}_2 Z \cap \text{int } K_2 \neq \emptyset,$$

$\text{Pr}_1 Z$ — выступающий воспроизводящий конус.

Доказательство очевидно.

*) Определение множеств $\text{Pr}_1 Z$ и $\text{Pr}_2 Z$ см. на стр. 59.

З а м е ч а н и е. Пусть Z — замкнутый конус, лежащий в $X_1 \times K_2$, и $(0, y) \notin Z$ при $y \neq 0$. Тогда конус $\text{Pr}_1 Z$ замкнут. В самом деле, пусть $x_n \in \text{Pr}_1 Z$ ($n = 1, 2, \dots$), $x_n \rightarrow x$. Найдутся элементы $y_n \in K_2$ такие, что $(x_n, y_n) \in Z$. Последовательность (y_n) ограничена (в противном случае последовательность $\left(\frac{1}{\|y_n\|}(x_n, y_n)\right)$ имеет предельные точки вида $(0, y)$, $y \neq 0$, что невозможно). Не умаляя общности, считаем, что (y_n) сходится к некоторому элементу u . Так как конус Z замкнут, то $(x, u) \in Z$ и, стало быть, $x \in \text{Pr}_1 Z$.

Предложение 4.15. Пусть $a \in A(K_1, K_2)$. Тогда для любого $g \in K_2^*$ функционал q_g , определенный на конусе K_1 формулой

$$q_g(x) = \max_{y \in a(x)} g(y) \quad (x \in K_1),$$

суперлинеен.

Доказательство. Полунепрерывность сверху функционала q_g следует из предложений 3.3 и 4.13. Если $x_1, x_2 \in K_1$, то, учитывая положительность g , имеем

$$\begin{aligned} q_g(x_1 + x_2) &= \\ &= \max_{y \in a(x_1 + x_2)} g(y) \geq \max_{y_1 \in a(x_1), y_2 \in a(x_2)} (g(y_1) + g(y_2)) = \\ &= \max_{y_1 \in a(x_1)} g(y_1) + \max_{y_2 \in a(x_2)} g(y_2) = q_g(x_1) + q_g(x_2). \end{aligned}$$

Мы показали, что q_g — супераддитивный функционал. Подобным же образом легко проверить, что q_g положительно однороден.

Предложение доказано.

Пусть $a \in A(K_1, K_2)$. Отображение na назовем *нормальной оболочкой* отображения a , если для любого $x \in K_1$ множество $(na)(x)$ совпадает с нормальной оболочкой (в смысле конуса K_2) множества $a(x)$. Иными словами, $(na)(x) = n(a(x))$ ($x \in K_1$).

Отображение a назовем *нормальным*, если $a = na$ (т. е. для любого $x \in K_1$ множество $a(x)$ нормально в смысле K_2).

Некоторые свойства нормальной оболочки будут описаны в п. 7. (Там, в частности, будет показано, что нормальная оболочка суперлинейного отображения суперлинейна.)

Приведем теперь несколько примеров,

Пример 1. Пусть $X_1 = R^n$, $X_2 = R^m$, $K_1 = R_+^n$, $K_2 = R_+^m$. Рассмотрим линейный положительный оператор U из R^n в R^m и для $x \in R_+^n$ положим

$$a_1(x) = \{Ux\}, \quad a_2(x) = \{y \in R^m \mid 0 \leq y \leq Ux\}.$$

Обращения a_1 и a_2 , определенные таким образом, суперлинейны (точнее говоря, $a_1, a_2 \in A(R_+^n, R_+^m)$). Обращение a_1 не является нормальным, в то время как a_2 нормально; при этом $a_2 = na_1$.

Пример 2. Оператор $F: R_+^n \rightarrow R_+^m$ называется суперлинейным, если

$$\begin{aligned} F(x_1 + x_2) &\geq F(x_1) + F(x_2) & (x_1, x_2 \in R_+^n), \\ F(\lambda x) &= \lambda F(x) & (x \in R_+^n, \lambda \geq 0). \end{aligned}$$

Оператор F суперлинеен тогда и только тогда, когда его координатные функции q_i ($q_i(x) = (F(x))^i$, $i = 1, 2, \dots, n$) являются суперлинейными функционалами.

Рассмотрим теперь отображения a_1 и a_2 :

$$a_1(x) = \{F(x)\}, \quad a_2(x) = \{y \in R^m \mid 0 \leq y \leq F(x)\}.$$

(Здесь, как и выше, $X_1 = R^n$, $X_2 = R^m$, $K_1 = R_+^n$, $K_2 = R_+^m$.) Обращение a_1 не суперлинейно (оно не является супераддитивным); обращение a_2 суперлинейно (и, кроме того, нормально).

Пример 3. Пространства X_i и конусы K_i ($i = 1, 2$) таковы же, что и в предыдущих примерах. Пусть $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k$ — выпуклые компакты в R_+^m ; q_1, q_2, \dots, q_k — суперлинейные функционалы, заданные в R_+^n . Обращение a , определенное на конусе R_+^n формулой

$$a(x) = \sum_{i=1}^k q_i(x) \Omega_i \quad (x \in R_+^n),$$

является суперлинейным. Нетрудно показать, что для $x \in R_+^n$

$$na(x) = \sum_{i=1}^k q_i(x) (n\Omega_i).$$

Пример 4. Пусть A и B — линейные положительные операторы из R^l в R^n , причем

1) равенство $h > 0$ влечет $Ah > 0$,

2) существует элемент $h_0 \in R_+^l$, для которого $Bh_0 \geq 0$.

Положим $Z = \{(Ah, Bh) \mid h \in R_+^l\}$. Очевидно, что Z — выпуклый многогранный конус, натянутый на элементы (A_i, B_i) , где $A_i = Ae_i$, $B_i = Be_i$ (здесь $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ — i -й

орт пространства R^l ($i = 1, 2, \dots, l$). Кроме того, $(0, y) \notin Z$ при $y \neq 0$ и $\text{Pr}_2 Z \cap \text{int}(R_+^n) \neq \emptyset$. Из предложения 4.13 следует, что отображение a , графиком которого является Z , суперлинейно. (Точнее говоря, $a \in A(K_1, K_2)$, где

$$K_1 = \text{Pr}_1 Z = \{x \in R_+^n \mid x = Ah, h \in R_+^l\},$$

а в качестве K_2 можно взять любой воспроизводящий выступающий конус, содержащий $\text{Pr}_2 Z = \{x \in R_+^n \mid x = Bh, h \geq 0\}$ и такой, что $\text{Pr}_2 Z \cap \text{int} K_2 \neq \emptyset$. Например, в качестве K_2 можно взять конус R_+^n .)

Запишем отображение a в явном виде

$$a(x) = \{y \in R_+^n \mid y = Bh, h \in A^{-1}(x), h \geq 0\} \quad (x \in K_1).$$

Найдем теперь нормальную оболочку na отображения a . Заметим, что эта оболочка существенно зависит от того, каким выбран конус K_2 . В самом деле, для $x \in K_1$

$$na(x) = n(a(x)) = (a(x) - K_2) \cap K_2.$$

В частности, если $K_2 = R_+^n$, то

$$na(x) = \{y \in R_+^n \mid 0 \leq y \leq Bh, h \in A^{-1}(x), h \geq 0\} \quad (x \in K_1).$$

В случае, когда $K_2 = R_+^n$, отображение a , рассмотренное в этом примере, называется *неймановским* (см. § 5). Нетрудно проверить, что неймановским является всякое гейловское отображение, график которого Z является многогранным конусом, лежит в $R_+^n \times R_+^n$ и удовлетворяет условию: $\text{Pr}_2 Z \cap \text{int} R_+^n \neq \emptyset$. Иногда график неймановского отображения a записывается (формально) иным способом, нежели приведенный выше. А именно, под A и B понимаются матрицы соответствующих операторов (в естественном базисе), а не сами эти операторы, точнее говоря,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1l} & a_{2l} & \dots & a_{nl} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1l} & b_{2l} & \dots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

(j -я строка матрицы A (B) состоит из координат вектора A_j (B_j) ($j = 1, 2, \dots, l$)).

Отождествляя пространства $R^n \times R^n$ и R^{2n} , график отображения a рассматривают как конус в R^{2n} , натянутый на образующие $(a_{1j}, \dots, a_{nj}, b_{1j}, \dots, b_{nj})$ ($j = 1, 2, \dots, l$). При этом под h понимается l -мерная вектор-строка, и вместо выражения, скажем, Ah (оператор A , примененный к вектору h) пишут hA (строка h , умноженная на матрицу A),

5. **Двойственные отображения.** Рассмотрим суперлинейное отображение $a: K_1 \rightarrow \Pi(K_2)$ (где $K_1 \subset X_1$, $K_2 \subset X_2$). Множество Z — график этого отображения — является выпуклым замкнутым конусом. При изучении выпуклых конусов важную роль играют сопряженные конусы. Однако при исследовании задач, возникающих в теории динамических моделей, оказывается удобным рассматривать не сопряженный к Z конус Z^* , а несколько отличающийся от Z^* объект, который мы назовем *двойственным* к Z конусом и обозначим символом Z' . По определению,

$$Z' = \{(f, g) \in K_1^* \times K_2^* \mid f(x) \geq g(y)\} \\ \text{для любой пары } (x, y) \in Z\}.$$

Непосредственно из определения следует, что Z' — выпуклый замкнутый конус. Этот конус не пуст; более того, $\text{Pr}_1 Z' = K_1^*$. Действительно, каков бы ни был f из K_1^* ,

$$f(x) \geq 0 \quad (x \in K_1),$$

и потому $(f, 0) \in Z'$.

Заметим, что Z' существенно зависит от конуса K_2 , фигурирующего в определении исходного отображения a .

Укажем теперь на связь между сопряженным и двойственным конусами. С этой целью положим

$$W' = \{(f, g) \in K_1^* \times (-K_2^*) \mid (f, -g) \in Z'\}.$$

Очевидно, что

$$W' = Z^* \cap (K_1^* \times (-K_2^*)).$$

Отображение a' , определенное на конусе K_1^* со значениями в $\Pi(K_2^*)$, графиком которого является конус Z' , назовем *двойственным* по отношению к отображению a (графиком которого является конус Z).

Если $f \in K_1^*$, то

$$a'(f) = \{g \in K_2^* \mid f(x) \geq \max_{y \in a(x)} g(y) \text{ для любого } x \in K_1\}. \quad (4.2)$$

При исследовании двойственных отображений важную роль играют суперлинейные функционалы. Это вы-

вано тем, что, согласно предложению 4.15, для любого $g \in K_2^*$ функционал q_g :

$$q_g(x) = \max_{y \in a(x)} g(y), \quad (4.3)$$

суперлинеен. Кроме того, как вытекает из формулы (4.2),

$$(a')^{-1}(g) = U_{q_g} \quad (g \in K_2^*) \quad (4.4)$$

(здесь U_{q_g} — множество всех линейных функционалов, опорных к q_g). В самом деле, в силу (4.2),

$$(a')^{-1}(g) = \{f \in K_1^* \mid f(x) \geq q_g(x) \text{ для всех } x \in K_1\}.$$

Остается заметить, что $U_{q_g} \subset K_1^*$, ибо для $f \in U_{q_g}$ выполняются соотношения

$$f(x) \geq q_g(x) = \max_{y \in a(x)} g(y) \geq 0 \quad (x \in K_1).$$

Используя сделанные замечания, покажем, что справедлива следующая

Теорема 4.1 (теорема двойственности). Пусть $a \in A(K_1, K_2)$. Тогда $a'(K_1^*) = K_2^*$, и для любого $g \in K_2^*$ и любого $x \in K_1$

$$\max_{y \in a(x)} g(y) = \inf_{f \in (a')^{-1}(g)} f(x).$$

Доказательство. Пусть $g \in K_2^*$ и q_g — функционал, определенный формулой (4.3). Используя теорему Фенхеля и формулу (4.4), получим $(a')^{-1}(g) = U_{q_g} \neq \emptyset$, откуда следует, что $g \in a'(K_1^*)$. Таким образом, $a'(K_1^*) = K_2^*$. Снова применяя теорему Фенхеля, имеем

$$\max_{y \in a(x)} g(y) = q_g(x) = \inf_{f \in U_{q_g}} f(x) = \inf_{f \in (a')^{-1}(g)} f(x),$$

откуда и следует справедливость теоремы.

Проверим теперь, что отображение a' суперлинейно и нормально.

Предложение 4.16. Если $a \in A(K_1, K_2)$, то $a' \in A(K_1^*, K_2^*)$ и, кроме того, a' нормально (в смысле конуса K_2^*).

Доказательство. Непосредственно из определения следует, что a' — вогнутое, положительно однородное, замкнутое отображение. Конус K_2^* телесен, и потому, используя теорему 4.1, имеем

$$a'(K_1^*) \cap \text{int } K_2^* = K_2^* \cap \text{int } K_2^* \neq \emptyset.$$

Проверим, наконец, что a' — гейловское отображение. В самом деле, если $g \in a'(0)$, то для всех $y \in a(K_1)$ выполняется $g(y) = 0$. В частности, если $y' \in a(K_1) \cap \text{int } K_2$, то $g(y') = 0$, а это означает, что $g = 0$. Стало быть, $a'(0) = \{0\}$. Мы показали, таким образом, что $a' \in A(K_1^*, K_2^*)$.

Для доказательства второй части предложения надо проверить, что при любом $f \in K_1^*$

$$a'(f) = (a'(f) - K_2^*) \cap K_2^*.$$

Пусть $g \in (a'(f) - K_2^*) \cap K_2^*$. Тогда найдется функционал $g' \in a'(f)$ такой, что $g' = g + g''$, где $g'' \in K_2^*$. Для $x \in K_1$ и $y \in a(x)$ имеем

$$f(x) \geq g'(y) = g(y) + g''(y) \geq g(y),$$

откуда следует, что $g \in a'(f)$. Таким образом, $a'(f) \supset (a'(f) - K_2^*) \cap K_2^*$. Обратное включение очевидно.

Предложение доказано.

Рассмотрим вопрос о произведении суперлинейных отображений и их двойственных.

Теорема 4.2. Пусть даны отображения $a_1 \in A(K_1, K_2)$, $a_2 \in A(K_2', K_3)$ (здесь $K_2' \supset K_2$ и $\text{int } K_2' \cap a(K_1) \neq \emptyset$). Тогда $a_2 \circ a_1 \in A(K_1, K_3)$. Если, кроме того, $K_2' = K_2$, то $(a_2 \circ a_1)' = a_2' \circ a_1'$.

Доказательство. Из предложений 3.2 и 4.13 следует, что отображение $a_2 \circ a_1$ замкнуто. Привлекая предложение 4.12, получим, что это отображение вогнуто, положительно однородно и является гейловским. Наконец, из условия $(\text{int } K_2') \cap a(K_1) \neq \emptyset$ и предложения 4.7 вытекает, что $(\text{int } K_3) \cap (a_2 \circ a_1)(K_1) \neq \emptyset$. Таким образом, отображение $a_2 \circ a_1$ суперлинейно.

Докажем вторую часть теоремы. Отметим прежде всего, что из равенства $K'_2 = K_2$ вытекает соотношение $(K'_2)^* = K_2^*$, и потому имеет смысл говорить о произведении $a'_2 \circ a_1$. Пусть $h \in K_3^*$. Рассмотрим функционал q_h :

$$q_h(x) = \max_{z \in a_2 \circ a_1(x)} h(z) \quad (x \in K_1).$$

В силу предложения 4.15 функционал q_h суперлинеен. Имеем, используя теорему двойственности и теорему о минимаксе,

$$\begin{aligned} q_h(x) &= \max_{z \in a_2(a_1(x))} h(z) = \max_{y \in a_1(x)} \max_{z \in a_2(y)} h(z) = \\ &= \max_{y \in a_1(x)} \inf_{g \in (a'_2)^{-1}(h)} g(y) = \inf_{g \in (a'_2)^{-1}(h)} \max_{y \in a_1(x)} g(y). \end{aligned}$$

Так как $K_2 = K_2$, то множество $(a'_2)^{-1}(h)$ включено в K_2^* . Поэтому, снова применяя теорему двойственности, получим для $g \in (a'_2)^{-1}(h)$

$$\max_{y \in a_1(x)} g(y) = \inf_{f \in (a'_1)^{-1}(g)} f(x).$$

Итак,

$$\begin{aligned} q_h(x) &= \inf_{g \in (a'_2)^{-1}(h)} \inf_{f \in (a'_1)^{-1}(g)} f(x) = \inf_{f \in (a'_1)^{-1} \circ (a'_2)^{-1}(h)} f(x) = \\ &= \inf_{f \in (a'_2 \circ a'_1)^{-1}(h)} f(x). \quad (4.5) \end{aligned}$$

Покажем, что множество $(a'_2 \circ a'_1)^{-1}(h)$ является K_1 -опорным. Отметим прежде всего, что это множество выпукло. Нетрудно проверить, что оно K_1^* -устойчиво. В самом деле, $0 \in a'_2 \circ a'_1(f)$ при любом $f \in K_1^*$, и потому, как следует из предложения 4.11, отображение $a'_2 \circ a'_1$ возрастает. (Считаем здесь, что пространство X_1^* упорядочено конусом K_1^* .) Используя предложение 4.8, и получим требуемую K_1^* -устойчивость множества $(a'_2 \circ a'_1)^{-1}(h)$. Покажем теперь, что это множество замкнуто. Пусть $f_n \in (a'_2 \circ a'_1)^{-1}(h)$, $f_n \rightarrow f$. Найдутся функционалы g_n такие, что $f_n \in (a'_1)^{-1}(g_n)$, $g_n \in (a'_2)^{-1}(h)$.

Так как отображение a_1' суперлинейно (и, стало быть, ограничено) и, кроме того, $g_n \in a_1'(f_n)$, то последовательность (g_n) ограничена. Не умаляя общности, считаем, что эта последовательность сходится, скажем, к функционалу g . Из соотношений $f \in (a_1')^{-1}(g)$ и $g \in (a_2')^{-1}(h)$ следует, что $f \in (a_2' \circ a_1')^{-1}(h)$. Тем самым требуемая замкнутость доказана. Отметим, наконец, что, как следует из (4.5),

$$\inf_{f \in (a_2' \circ a_1')^{-1}(h)} f(x) > -\infty.$$

Тем самым проверено, что множество $(a_2' \circ a_1')^{-1}$ удовлетворяет всем условиям, фигурирующим в определении K_1 -опорного множества; стало быть, оно K_1 -опорно. Используя теорему 2.2 и привлекая формулу (4.5), имеем $(a_2' \circ a_1')^{-1}(h) = U_{qh}$. С другой стороны, используя формулу (4.4) (при $a = (a_2 \circ a_1)'$ и $g = h$), имеем $U_{qh} = ((a_2 \circ a_1)')^{-1}(h)$. Итак, при всех $h \in K_3^*$

$$(a_2' \circ a_1')^{-1}(h) = ((a_2 \circ a_1)')^{-1}(h),$$

т. е. $(a_2' \circ a_1')^{-1} = ((a_2 \circ a_1)')^{-1}$. Перейдя в обеих частях написанного равенства к обратным отображениям, получим $a_2' \circ a_1' = (a_2 \circ a_1)'$.

Теорема доказана.

В заключение этого пункта выразим норму суперлинейного отображения в терминах двойственного отображения.

Предложение 4.17. Пусть в пространстве X_1 введена норма, монотонная*) относительно конуса K_1 , в пространстве X_2 — норма, монотонная относительно K_2 .

Пусть, далее, $a \in A(K_1, K_2)$. Тогда

$$\|a\| = \max_{\|g\| \leq 1, g \in K_2^*} \min_{f \in (a')^{-1}(g)} \|f\|.$$

*) Определение монотонной нормы см. в п. 12 § 2.

Доказательство. Из монотонности нормы в пространствах X_1 и X_2 соответственно следуют формулы

$$\|y\| = \max_{\|g\| \leq 1, g \in K_2^*} g(y), \quad \|f\| = \max_{\|x\| \leq 1, x \in K_1} f(x).$$

(Первая из этих формул легко вытекает из предложения 2.11; вторая — из замечания к этому предложению.)

Условимся в дальнейшем вместо $\max_{\|g\| \leq 1, g \in K_2^*}$ писать \max_g , вместо $\max_{\|x\| \leq 1, x \in K_1}$ писать \max_x . Тогда, привлекая теорему двойственности и теорему о минимаксе, получим

$$\begin{aligned} \|a\| &= \max_x \max_{y \in a(x)} \|y\| = \max_x \max_{y \in a(x)} \max_g g(y) = \\ &= \max_g \max_x \max_{y \in a(x)} g(y) = \max_g \max_x \inf_{f \in (a')^{-1}(g)} f(x) = \\ &= \max_g \inf_{f \in (a')^{-1}(g)} \max_x f(x) = \max_g \inf_{f \in (a')^{-1}(g)} \|f\|. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что множество $(a')^{-1}(g)$ имеет элемент с наименьшей нормой, и потому \inf в последнем члене написанного равенства можно заменить на \min .

Предложение доказано.

6. Второе двойственное отображение и нормальная оболочка. Рассмотрим суперлинейное отображение a . Как было показано выше, отображение a' , двойственное к a , также суперлинейно, и потому имеет смысл говорить об отображении $(a)'$, двойственном к a' . Это отображение будем называть *вторым двойственным к a* и обозначать через a'' . Если $a \in A(K_1, K_2)$, то $a' \in A(K_1^*, K_2^*)$, и потому $a'' \in A(K_1, K_2)$. Следующая теорема описывает второе двойственное к суперлинейному отображению.

Теорема 4.3. Если $a \in A(K_1, K_2)$, то $a'' = na$.

Доказательство. Пусть $x \in K_1$; покажем, что $a''(x) = na(x)$. Заметим, что, в силу теоремы двойственности, множество $(a')^{-1}(g)$ не пусто для любого $g \in K_2^*$, поэтому мы можем определить на конусе K_2^* функционал p_x , положив для $g \in K_2^*$

$$p_x(g) = \inf_{f \in (a')^{-1}(g)} f(x).$$

Снова применяя теорему двойственности, получим, что

$$p_x(g) = \max_{y \in a(x)} g(y), \quad (4.6)$$

и потому функционал p_x сублинеен и монотонен.

Рассмотрим теперь множество $U_{p_x}^+ = U_{p_x} \cap K_2^*$ и проверим, что $U_{p_x}^+ = a''(x)$.

Действительно, если $y \in a''(x)$, то для любых $g \in K_2^*$ и $f \in (a')^{-1}(g)$

$$f(x) \geq g(y),$$

откуда следует, что

$$p_x(g) = \inf_{f \in (a')^{-1}(g)} f(x) \geq g(y).$$

Последнее соотношение означает, что $y \in U_{p_x}^+$ и, следовательно, $a''(x) \subset U_{p_x}^+$.

Таким же образом можно убедиться в справедливости обратного включения.

Так как множество $a(x)$ содержится в K_2 и выпукло, то, используя (4.6) и привлекая предложение 2.9, получим, что $U_{p_x}^+ = na(x)$.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. Суперлинейное отображение совпадает со своим вторым двойственным тогда и только тогда, когда оно нормально.

С л е д с т в и е 2. Нормальная оболочка суперлинейного отображения суперлинейна.

Выясним еще некоторые свойства нормальной оболочки.

П р е д л о ж е н и е 4.18. Пусть $a_1 \in A(K_1, K_2)$, $a_2 \in A(K_2, K_3)$. Тогда $n(a_1 \circ a_2) = na_1 \circ na_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя теоремы 4.2 и 4.3, имеем

$$n(a_1 \circ a_2) = (a_1 \circ a_2)'' = ((a_1 \circ a_2)')' = (a_1' \circ a_2')' = a_1'' \circ a_2'' = na_1 \circ na_2.$$

Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 4.19. Пусть $a_1 \in A(K_1, K_2)$. Тогда $(na)' = a'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению,

$$(na)'(f) = \{g \in K_2^* \mid f(x) \geq \max_{y \in na(x)} g(y) \text{ для всех } x \in K_1\}.$$

Используя свойства нормальной оболочки множества (см. предложение 2.5), имеем $\max_{y \in na(x)} g(y) = \max_{y \in a(x)} g(y)$, откуда и следует, что $(na)' = a'$.

С л е д с т в и е 1. Если a — суперлинейное отображение, то $(a'')' = a'$.

С л е д с т в и е 2. Если норма в X_1 монотонна относительно K_1 , а в X_2 монотонна относительно K_2 , то $\|a\| = \|na\|$.

Доказательство вытекает из предложений 4.17 и 4.19. (Справедливость его, впрочем, легко проверяется непосредственно.)

7. Суперлинейные отображения и выпукло-вогнутые положительно однородные функционалы. Рассмотрим отображение $a \in A(K_1, K_2)$ и на конусе $K_1 \times K_2^*$ (в пространстве $X_1 \times X_2^*$) определим функционал ψ , положив

$$\psi(x, g) = \max_{y \in a(x)} g(y) \quad ((x, g) \in K_1 \times K_2^*). \quad (4.7)$$

Выясним некоторые свойства функционала ψ .

1) При фиксированном $g \in K_2^*$ функционал q_g :

$$q_g(x) = \psi(x, g) \quad (x \in K_1), \quad (4.8)$$

суперлинеен.

2) При фиксированном $x \in K_1$ функционал p_x :

$$p_x(g) = \psi(x, g), \quad (4.9)$$

сублинеен и монотонен.

3) Найдется такая точка $x_0 \in K_1$, что

$$\psi(x_0, g) > 0 \quad (g \in K_2^* \setminus \{0\}). \quad (4.10)$$

Отметим еще, что функционалы, построенные с помощью формулы (4.7) по отображениям a и na , совпадают.

Покажем теперь, что для каждого функционала ψ , определенного на конусе $K_1 \times K_2^*$ и удовлетворяющего условиям 1) — 3), существует и единственно нормальное отображение $a \in A(K_1, K_2)$, обладающее тем свойством, что построенный по нему с помощью формулы (4.7) функционал совпадает с ψ . Таким отображением является следующее:

$$a(x) = U_{p_x}^+ \quad (x \in K_1) \quad (4.11)$$

(где p_x — функционал, определенный формулой (4.9)).

Проверим, что a — нормальное суперлинейное отображение.

1) Отображение a супераддитивно. В самом деле, если $x_1, x_2 \in K_1$, то для всех $g \in K_2^*$

$$p_{x_1+x_2}(g) = \psi(x_1 + x_2, g) \geq \psi(x_1, g) + \psi(x_2, g) = p_{x_1}(g) + p_{x_2}(g).$$

Таким образом,

$$p_{x_1+x_2} \geq p_{x_1} + p_{x_2},$$

откуда, привлекая теорему 2.6, имеем

$$a(x_1 + x_2) = U_{p_{x_1+x_2}}^+ \supset U_{p_{x_1}+p_{x_2}}^+ = n(U_{p_{x_1}}^+ + U_{p_{x_2}}^+) \supset U_{p_{x_1}}^+ + U_{p_{x_2}}^+ = a(x_1) + a(x_2).$$

Таким же образом можно показать, что

2) Отображение a положительно однородно.

3) Отображение a замкнуто. Пусть $x_n \rightarrow x$, $y_n \in a(x_n) = U_{p_{x_n}}^+$, $y_n \rightarrow y$. Нам надо показать, что $y \in a(x) = U_{p_x}^+$. Так как $y_n \in U_{p_{x_n}}^+$, то при всех $g \in K_2^*$

$$g(y_n) \leq p_{x_n}(g) = \psi(x_n, g) = q_g(x_n)$$

(где q_g — функционал, определенный формулой (4.8)). Поскольку q_g полунепрерывен сверху, то

$$g(y) = \lim g(y_n) \leq \overline{\lim} q_g(x_n) \leq q_g(x) = p_x(g).$$

Итак, при всех $g \in K_2^*$

$$p_x(g) \geq g(y),$$

откуда и следует, что $y \in U_{p_x}^+$.

4) Множество $a(x)$ нормально при всех $x \in K_1$. Это следует из следствия 1 из предложения 2.9.

5) Отображение a является гейловским. Действительно, поскольку множество $a(x)$ нормально, то оно ограничено. Остается применить предложение 4.3.

6) Справедливо соотношение $(\text{int } K_2) \cap a(K_1) \neq \emptyset$. По условию, существует точка $x_0 \in K_1$ такая, что при всех $g \in K_2^* \setminus \{0\}$

$$\psi(x_0, g) > 0.$$

Используя теорему 2.4, получим отсюда

$$p_{x_0}(g) = \max_{y \in U_{p_{x_0}}^+} g(y) = \max_{y \in a(x_0)} g(y) > 0 \quad (g \in K_2^* \setminus \{0\}). \quad (4.12)$$

Это неравенство показывает, что $a(x_0) \cap (\text{int } K_2) \neq \emptyset$. В самом деле, предполагая противное и применяя теорему отделимости,

мы могли бы указать ненулевой функционал $g \in K_2^*$ такой, что

$$g(y) = 0 \quad (y \in a(x)), \quad g(y) > 0 \quad (y \in \text{int } K_2),$$

что противоречит (4.12).

Итак, $a(x_0) \cap (\text{int } K_2) \neq \emptyset$ и, тем более, $a(K_1) \cap (\text{int } K_2) \neq \emptyset$. Мы показали, что a — нормальное суперлинейное отображение. Из формулы

$$\psi(x, g) = p_x(g) = \max_{y \in U_{p_x}^+} g(y) \quad ((x, g) \in K_1 \times K_2^*)$$

непосредственно следует, что функционал ψ , определяющий отображение a , восстанавливается по этому отображению с помощью формулы (4.7).

Таким образом, справедливо

Предложение 4.20. *Отображение $a \rightarrow \psi$, определяемое формулой (4.7), осуществляет взаимно однозначное соответствие между множеством всех нормальных отображений из $A(K_1, K_2)$ и множеством всех функционалов, определенных на $K_1 \times K_2^*$ и удовлетворяющих условиям (4.8) — (4.10).*

З а м е ч а н и е. Наряду с отображением a , построенным по формуле (4.11), функционал ψ порождает и отображение a' . В самом деле, для $g \in K_2^*$ множество $(a')^{-1}(g)$ совпадает с множеством U_{q_g} всех опорных к функционалу q_g , определенному формулой (4.8).

8. Примеры. Приведем несколько примеров двойственных отображений.

Пример 1. Пусть $X_1 = R^n$, $X_2 = R^m$, $K_1 = R_+^n$, $K_2 = R_+^m$,

$$a_1(x) = \{Ax\}, \quad a_2(x) = \{y \in R^m \mid 0 \leq y \leq Ax\},$$

где $A: R^n \rightarrow R^m$ — положительный линейный оператор. Для $f \in (R_+^n)^*$ имеем

$$\begin{aligned} a_1'(f) &= \{g \in (R_+^m)^* \mid f(x) \geq g(Ax) \text{ для всех } x \in R_+^n\} = \\ &= \{g \in (R_+^m)^* \mid f(x) \geq A^*g(x) \text{ для всех } x \in R_+^n\}. \end{aligned}$$

Так как $a_2 = na_1$, то $a_2' = a_1'$, $a_1'' = a_2'' = a_2$.

На конусе $R_+^n \times (R_+^m)^*$ рассмотрим функционал

$$\psi(x, g) = \max_{y \in a_1(x)} g(y) = \max_{y \in a_2(x)} g(y).$$

В нашем случае этот функционал совпадает с билинейной формой $g(Ax)$, которая служит для определения сопряженного оператора. Заметим еще, что для $g \in (R_+^m)^*$

$$(a_1')^{-1}(g) = \{f \in (R_+^n)^* \mid f \geq A^*g\} = A^*g + (R_+^n)^*.$$

Таким образом, множество $(a'_1)^{-1}(g)$ полностью определяется элементом A^*g (это есть конус с вершиной в A^*g).

Приведенный пример показывает, что понятие отображения, обратного к двойственному, естественно рассматривать как обобщение понятия сопряженного оператора.

Пример 2. Рассмотрим неймановское отображение, определяемое конусом $Z = \{(Au, Bu) \mid u \in R_+^l\}$ (здесь используются обозначения примера 4 п. 4). Пусть $K_1 = Pr_1 Z$, $K_2 = R_+^n$. Будем считать, что K_1 — воспроизводящий конус. Найдем двойственный к Z конус Z' :

$$\begin{aligned} Z' &= \{(f, g) \in K_1^* \times (R_+^n)^* \mid f(Au) \geq g(Bu) \text{ для всех } u \in R_+^l\} = \\ &= \{(f, g) \in K_1^* \times (R_+^n)^* \mid A^*f \geq B^*g\}. \end{aligned}$$

Конус Z' многогранен и потому, если $K_1 = R_+^n$, то отображение x' является неймановским.

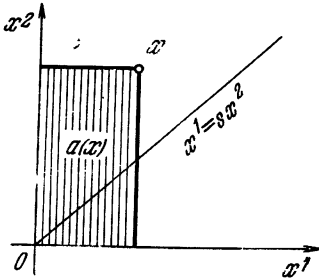


Рис. 13.

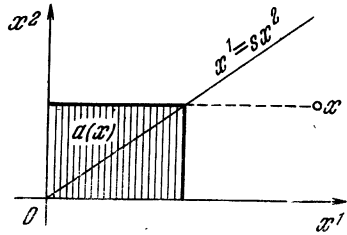


Рис. 14.

Приведем теперь один простой конкретный пример суперлинейного отображения и опишем двойственное к нему.

Пример 3. Пусть $X_1 = X_2 = R^2$; $K_1 = K_2 = R_+^2$.

Зафиксируем положительное число s и для $x \in R_+^2$ положим (рис. 13, 14)

$$a(x) = \begin{cases} \{y \in R_+^2 \mid y \leq x\}, & \text{если } x^1 \leq sx^2, \\ \{y \in R_+^2 \mid y^1 \leq \cdot x^2; y^2 \leq x^2\}, & \text{если } x^1 \geq sx^2. \end{cases}$$

Рассмотрим оператор $F: R_+^2 \rightarrow R_+^2$, определенный формулой $Fx = = (\min(x^1, sx^2), x^2)$. Очевидно, что

$$a(x) = \{y \in R_+^2 \mid y \leq Fx\} \quad (x \in R_+^2).$$

Оператор F суперлинеен (см. пример 2 п. 4), а потому и отображение a суперлинейно. Заметим, что это отображение нормально.

Найдем теперь отображение a' . Нам будет удобно описать множество $(a')^{-1}(g)$ (где $g \in R_+^2$). По определению

$$(a')^{-1}(g) = \{f \in (R_+^2)^* \mid f(x) \geq \max_{y \in a(x)} g(y) \text{ для всех } x \in R_+^2\}.$$

Имеем

$$\max_{y \in a(x)} g(y) = \begin{cases} g^1 x^1 + g^2 x^2, & \text{если } x^1 \leq s x^2, \\ s g^1 x^2 + g^2 x^2, & \text{если } x^1 \geq s x^2, \end{cases}$$

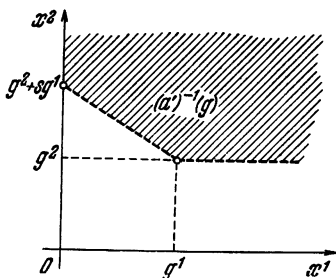


Рис. 15.

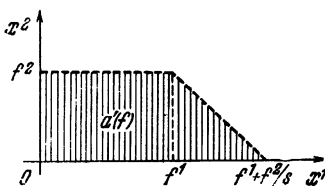


Рис. 16.

и потому $f \in (a')^{-1}(g)$ тогда и только тогда, когда

$$f^1 x^1 + f^2 x^2 \geq g^1 x^1 + g^2 x^2 \quad (x \in R_+^2, x^1 \leq s x^2),$$

$$f^1 x^1 + f^2 x^2 \geq s g^1 x^2 + g^2 x^2 \quad (x \in R_+^2, x^1 \geq s x^2).$$

Решая эту систему неравенств, получим (рис. 15)

$$(a')^{-1}(g) = \{f \in (R_+^2)^* \mid f^2 - g^2 \geq 0, f^2 - g^2 \geq s(g^1 - f^1)\} \\ (g \in (R_+^2)^*),$$

откуда (рис. 16)

$$a'(f) = \{g \in (R_+^2)^* \mid f^2 - g^2 \geq 0, f^2 - g^2 \geq s(g^1 - f^1)\} \\ (f \in (R_+^2)^*).$$

В настоящей главе вводится в рассмотрение и изучается основная модель экономической динамики, частный случай которой был предложен Дж. фон Нейманом еще в 1937 году (см. Нейман [1]). Мы называем эту модель *моделью Неймана — Гейла*, поскольку Гейл [2] сделал естественное и, в некотором смысле, максимально возможное обобщение первоначальной конструкции Неймана.

Модель Неймана — Гейла изучается также в последующих главах, кроме того, она является важной составной частью более общих моделей экономической динамики, и результаты, полученные для нее, используются для исследования других моделей.

§ 5. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ НЕЙМАНА — ГЕЙЛА

1. Определение модели Неймана — Гейла. В этом параграфе строится модель Неймана — Гейла, в частности, указываются основные экономические предпосылки, заложенные в эту модель, и обосновывается стандартная форма модели.

Будем предполагать на протяжении всего параграфа, что число «продуктов» в экономической системе, а также число «районов», в которых эти продукты могут находиться, конечно. Время, в котором действует система, дискретно, т. е. временная переменная t может принимать лишь значения $0, 1, 2, \dots$

Слово «продукт» взято в кавычки, потому что продукты понимаются в математических моделях экономики в обобщенном смысле. В множество «продуктов» входят не только продукты в обычном смысле слова, но и виды трудовых и природных ресурсов, виды фондов, услуги, разного рода условные «продукты» (например, «продукт», количество

которого измеряет эффект от потребления какого-нибудь другого продукта) и т. д.

В теории моделей экономической динамики изучаются в основном траектории движения экономики в фазовом пространстве, иногда называемом *пространством «продуктов»*.

Состояние экономической системы в некоторый момент времени описывается количествами всех «продуктов», имеющихся в этот момент времени в системе, с указанием, в каком районе соответствующие «продукты» находятся, т. е. состояние есть вектор с неотрицательными компонентами, размерность которого равна произведению числа «продуктов» на число районов.

Очевидно, что, вообще говоря, технологически возможны различные траектории движения экономической системы, начинающиеся в одном и том же состоянии. Иначе говоря, последующее состояние экономики неоднозначно определяется предыдущим с помощью технологических возможностей. Это означает, что возможности перехода из состояния в состояние в моделях экономической динамики задаются с помощью некоторого точечно-множественного отображения a . А именно, если в некоторый момент времени состояние экономики есть x , то $a(x)$ представляет собой множество состояний, в которые экономика может («способна») перейти в следующий момент времени; иными словами, отображение a определяется всеми «производственными» возможностями экономической системы. Слово «производственные» взято в кавычки, так как здесь имеются в виду, естественно, не только чисто производственные, но и потребительские, транспортные возможности, а также возможности сферы услуг, воспроизводство трудовых ресурсов и т. п. При рассмотрении экономики, функционирующей в непрерывном времени, интерпретация множества $a(x)$ несколько иная, см. по этому поводу § 10.

Если модель задается точечно-множественным отображением a , то мы будем называть последовательность $(x_t)_{t=0}^{\infty}$ *допустимой* (или *технологически возможной*) *траекторией*, если $x_{t+1} \in a(x_t)$ для всех t . Свойства множества допустимых траекторий, определяемых отображением a , также являются объектом изучения (см. гл. III, IV).

Как правило, точечно-множественное отображение a , задающее «производственные» возможности экономической системы, предполагается суперлинейным. (Точнее говоря, $a \in A(K, R_+^n)$, где $K \subset R_+^n$.) Это обстоятельство является, в основном, оправданным; иными словами, можно считать, особенно для крупноагрегированных моделей, что суперлинейность приближенно выполняется в реальных экономических ситуациях. Действительно, супераддитивность означает, что от объединения ресурсов можно только выиграть в смысле богатства «производственных» возможностей. Требование $a(0) = \{0\}$ выражает закон сохранения, согласно которому «из ничего нельзя получить нечто». Полунепрерывность сверху, т. е. замкнутость графика Z отображения a , также представляется вполне естественным требованием, ибо точки $(x, y) \in Z$ интерпретируются как возможные «производственные» процессы по переработке наборов «продуктов» x в наборы y . Поэтому замкнутость множества всех имеющихся в экономике процессов выступает как чисто математическое требование, не противоречащее экономической сути дела.

Условие $a(K) \cap \text{int } R_+^n \neq \emptyset$ имеет простой экономический смысл; оно означает, что в нашей экономической системе каждый «продукт» может быть «произведен».

Единственное требование, которое может вызывать и вызывает серьезные возражения, это положительная однородность первой степени отображения a . Экономически оно формулируется как требование независимости от масштаба.

Требование однородности достаточно хорошо исследовано в чисто экономической литературе. Описаны экономические условия, при которых оно может не выполняться, и т. д. С точки зрения математического анализа моделей экономической динамики требования однородности и супераддитивности в некоторых случаях могут быть заменены требованием вогнутости. Дело в том, что вогнутым отображениям a можно сопоставить суперлинейные отображения \hat{a} так, что основные свойства отображений a и \hat{a} совпадают. Подробно см. об этом в § 11.

Требование вогнутости вытекает из известного в экономической науке закона о «падении эффективности с увеличением объема». Этот закон и различные его следствия

хорошо изучены (см. Самуэльсон [1]), определены границы его применимости и т. д.

Дадим теперь определение основного объекта изучения данной главы — модели Неймана — Гейла. *Моделью Неймана — Гейла* называется выпуклый замкнутый конус Z , лежащий в прямом произведении $R_+^n \times R_+^n$ и обладающий теми свойствами, что

$$(0, y) \notin Z \text{ при } y \neq 0 \text{ и } \text{Pr}_2 Z \cap (\text{int } R_+^n) \neq \phi.$$

Иногда мы будем говорить, что модель Неймана — Гейла задается или определяется конусом Z . Полагая $\text{Pr}_1 Z = K$, получим, что модель Неймана — Гейла можно отождествить с суперлинейным отображением a конуса K в $\Pi(R_+^n)$. Конкретные формы задания модели (отображения a) могут быть различными (см. примеры § 4). Отображение a , графиком которого является конус Z , называется *производственным отображением модели*.

Если конус Z , задающий модель, многогранен, то последняя называется *моделью Неймана* (иными словами, модель Неймана определяется с помощью неймановского отображения).

Модель Неймана обычно задается парой матриц $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$, где $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ (см. п. 4 § 4); так, что векторы

$$(a_{1j}, \dots, a_{nj}, b_{1j}, \dots, b_{nj}) \quad (j = 1, \dots, m)$$

являются образующими конуса Z . Эти векторы называются обычно *базисными процессами*. Отображение a определяется матрицами A и B следующим образом (ср. с п. 4 § 4):

$$a(x) = \left\{ y \in R_+^n \mid x^i = \sum_j \lambda_j a_{ij}, y^i = \sum_j \lambda_j b_{ij}, \lambda_j \geq 0 \right\}.$$

Заметим, что одна и та же модель Неймана может определяться разными матрицами A и B (это вызвано тем, что один и тот же многогранный конус может быть представлен как коническая оболочка разных конечных множеств).

Частным случаем модели Неймана является *модель Леонтьева* *). Эта модель задается конусом Z , состоящим

*) Мы упоминаем здесь простейшую формулировку модели Леонтьева. В более общем случае модель Леонтьева задается парой

из пар вида (Ax, x) , где A — неотрицательная квадратная $(n \times n)$ -матрица, обладающая тем свойством, что неравенство $Ax > 0$ влечет $x > 0$. Обозначая через I единичную матрицу порядка n , можно сказать, что модель Леонтьева совпадает с моделью Неймана, определяемой парой матриц A и I . Модель Леонтьева описывает экономическую систему, в которой число «продуктов» совпадает с числом базисных процессов, причем каждый из этих процессов выпускает только один «продукт».

Некоторым обобщением модели Леонтьева является так называемая *модель Неймана — Леонтьева* (см. Моришима [2]), которая определяется парой прямоугольных матриц A и B , причем B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_n \end{pmatrix}, \quad \text{где } B_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$l = 1, 2, \dots, n.$$

B_l — матрица размера $n \times k_l$, причем $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$; l -й столбец состоит из единиц, а остальные столбцы — нулевые.

В этой модели, как и в модели Леонтьева, каждый базисный процесс производит только один «продукт», однако, вообще говоря, один и тот же «продукт» может производиться разными процессами.

В литературе рассматриваются и другие частные случаи модели Неймана — Гейла; мы, однако, не останавливаемся на их описании.

Модель Неймана — Гейла естественным образом обобщается на случай, когда отображения, описывающие «производственные» возможности, изменяются со временем и изменяется также номенклатура продуктов, т. е. размерность пространства, на котором определено отображение и соответственно в которое оно действует. Получающаяся при этом модель называется *моделью типа Неймана — Гейла*. (В случае когда соответствующие от- квадратных матриц A и B , так что процессы (x, y) определяются соотношением

$$(I - A + B)x = By.$$

Подробнее об этом см. Моришима [2].

бражения являются неймановскими, употребляется также термин «*модель типа Неймана*».) Эта модель и более общая модель, когда временная переменная t может принимать значения из произвольного числового множества, рассматриваются далее в §§ 8—10.

2. Теорема о канонической форме. Рассмотрим модель Неймана — Гейла Z . Как уже отмечалось выше, векторы $(x, y) \in Z$ интерпретируются как «производственные» процессы, где x есть вектор затрат, y — вектор выпуска, причем затраты относятся к одному временному интервалу, а выпуск к следующему интервалу. Из экономических соображений ясно, что в принципе «производственные» процессы могут быть более общего вида, когда затраты и выпуск производятся, например, в одном и том же временном интервале или процесс может захватывать не два смежных, а большее число временных интервалов. Дадим более точное и подробное описание этой ситуации и докажем теорему, утверждающую, что «производственные» процессы произвольного вида могут быть сведены к виду, который принят в модели Неймана — Гейла (или модели типа Неймана — Гейла).

Введем понятие ингредиента. *Ингредиентом* называется «продукт» с указанием района и момента времени. Таким образом, если модель экономики рассматривается на конечном временном интервале $0, 1, \dots, T$, то число ингредиентов модели также конечно. Обозначим это число через n . «Производственная» (в широком смысле) деятельность состоит в преобразовании или переработке одних ингредиентов в другие.

В моделях экономики, основанных на задаче линейного программирования, «производственные» возможности задаются с помощью конечного набора производственных или технологических способов. *Производственный способ* представляет собой n -мерный вектор; таким образом, все имеющиеся способы образуют матрицу $A = \|a_s^i\|$ порядка $n \times S$, где S — число способов. Экономическая интерпретация вектора $a_s = (a_s^1, \dots, a_s^n)$ такова: если $a_s^i > 0$, то это означает, что ингредиент с номером i выпускается при единичной интенсивности применения данного способа s в количестве a_s^i . Если $a_s^i < 0$, то ингредиент i затрачивается в количестве $|a_s^i|$.

Наша цель сейчас состоит в том, чтобы сравнить «богатства производственных возможностей», которые задаются с помощью модели типа Неймана и с помощью конечного набора «производственных» способов общего вида, как это принято в задачах линейного программирования. Для этого прежде всего опишем, как преобразования ингредиентов осуществляются с помощью всего набора способов a_1, \dots, a_s .

По определению множество номеров ингредиентов I распадается на непересекающиеся подмножества I_0, I_1, \dots, I_T такие, что в множество I_t входят ингредиенты, относящиеся к периоду времени t , и только они. Число элементов множества I_t обозначим через n_t . Соответственно матрица $A = \|a_s^i\|$ разбивается на подматрицы A_0, \dots, A_T . Определим точно-множественные отображения $b_t (t = 1, \dots, T)$, сопоставляющие каждому вектору $x \geq 0$ размерности n_1 множества $b_t(x)$, по следующему правилу:

$$b_t(x) = \{y \mid y = hA_t, h \in R_+^s, hA_0 \geq -x, hA_\tau \geq 0, \tau = 1, \dots, T\} \quad (t = 1, \dots, T).$$

Экономический смысл множества $b_t(x)$ таков. Вектор $y \in b_t(x)$ представляет собой набор «продуктов», который можно получить в период t с помощью набора «продуктов» x , имеющихся в начальный момент времени.

Рассмотрим модель типа Неймана, заданную семейством «многогранных» суперлинейных точно-множественных отображений $(\bar{a}_i)_{i=0}^{T-1}$. В этой модели множества возможных наборов «продуктов», которые можно получить из фиксированного набора x , определяются следующим образом: $a_0(x) = \bar{a}_0(x)$ есть множество наборов, получающихся из \bar{x} в момент $t = 1$, $a_1(x) = \bar{a}_1 \circ \bar{a}_0(x)$ — множество для $t = 2$, и т. д.,

$$a_t(x) = (\bar{a}_t \circ \bar{a}_{t-1} \circ \dots \circ \bar{a}_0)(x).$$

Итак, надо сравнивать отображения (b_t) , определенные матрицей $\|a_s^i\|$, и отображения (a_t) , определенной моделью типа Неймана.

Исходя из экономических соображений, на матрицу производственных способов $\|a_s^i\|$ накладываются ограничения:

- 1) Для любого $x \geq 0$ множества $b_t(x)$ ограничены.

2) Не существует способов a_s , таких, что $a_s^i > 0$ и $a_s^{i'} < 0$ для $i \in I_t$, $i' \in I_{t'}$, где $t' > t$.

Первое ограничение означает, что невозможно производить сколь угодно много с помощью конечных затрат. Это требование равносильно совокупности двух других, а именно: если $a_s \neq 0$, то найдется номер i такой, что $a_s^i < 0$; невозможно наличие двух способов вида

$$(0, \dots, -1, +1, \dots, 0), (0, \dots, 1 + \varepsilon, -1, \dots, 0) \quad (\varepsilon > 0).$$

Второе ограничение говорит о том, что невозможно выпускать продукцию в некоторый момент времени с помощью затрат, которые будут производиться в более поздние периоды (необратимость времени). Кроме перечисленных двух ограничений наложим еще одно для упрощения приводимого ниже доказательства теоремы 5.1.

3) Матрица A_0 не содержит положительных элементов. Теорема 5.1 (о канонической форме).

Для любой матрицы производственных способов $A = \|a_s^i\|$, удовлетворяющей ограничениям 1) — 3), можно построить модель типа Неймана $(a_i)_{i=1}^T$ такую, что $b_t(x) = \text{Pr}_t a_t(x)$ для всех $t = 1, \dots, T$ и $x \geq 0$. Здесь Pr_t — проекция отображения a_t на некоторое подпространство*).

Доказательство. Обозначим через H_x множество векторов $h \in R_+^S$ таких, что $hA_0 \geq -x$, $hA_t \geq 0$ для $t = 1, \dots, T$. Рассмотрим матрицу $B(0)$, соответствующую этим ограничениям,

$$B(0) = \begin{pmatrix} A_0(0) & I & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I & A_1(0) & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & A_2(0) & I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -I & A_T(0) \end{pmatrix}.$$

Здесь I — единичная матрица порядка S , $A_t(0) = A_t$ ($t = 0, \dots, T$). Матрица $B(0)$ обладает следующим свойством: $b_t(x) = \{y \mid y = h(t)A_t(0), h(t) \in H_x\}$, и все «производственные» процессы (строки матрицы $B(0)$)

* Это подпространство определяется в процессе доказательства теоремы.

имеют отличные от нуля компоненты, относящиеся только к двум смежным интервалам времени. Будем обозначать это свойство значком Δ .

Оставшаяся часть доказательства состоит в следующем. Определяются преобразования матрицы $B(0)$ такие, что они не нарушают свойства Δ . В результате всех этих преобразований получается матрица $B(N)$, которая определяет искомую модель типа Неймана.

Пусть в матрице $A_t(0)$ встретилась нулевая строка, тогда вычеркнем соответствующую строку матрицы $B(0)$, и те столбцы матрицы $B(0)$, у которых в вычеркнутой строке стоят ненулевые элементы. При $0 < t < T$ таких столбцов будет два, а при $t = 0, T$ — один. После того, как такая операция будет проделана со всеми нулевыми строками матриц $A_1(0), \dots, A_T(0)$, из матрицы $B(0)$ получится матрица, которую мы обозначим через $B(1)$. Матрица $B(1)$, очевидно, обладает, так же как и $B(0)$, свойством, состоящим в том, что $b_t(x) = \{y \mid y = \bar{h}(t)A_t(1), \bar{h}(t) \in \bar{H}_x\}$.

Здесь $\bar{h}(t)$, $A_t(1)$, \bar{H}_x — вектор, матрица и множество, получившиеся из $h(t)$, $A_t(0)$ и H_x после преобразования матрицы $B(0)$ в матрицу $B(1)$. Это же свойство, очевидно, сохранится также и для матрицы $B(2)$, получающейся из $B(1)$, если во всех матрицах $A_t(1)$ заменить столбцы, не содержащие положительных элементов нулевыми столбцами. Таким образом, матрицы $A_t(2)$ ($t > 0$) не содержат столбцов, состоящих только из неположительных элементов, но могут содержать столбцы, в которых встречаются как положительные, так и отрицательные элементы. Наша задача теперь состоит в том, чтобы избавиться от таких столбцов, т. е. получить матрицы только с неотрицательными элементами. Итак, возьмем какую-нибудь матрицу $A_t(2)$ ($t > 0$), и пусть в ней встретился отрицательный элемент. Тогда в том же столбце, номер которого пусть будет i , найдется положительный элемент. Отметим все такие положительные элементы. Обозначим строку матрицы $B(2)$, содержащую данный отрицательный элемент через b_{k+1} , а строки, содержащие помеченные элементы, через b_1, \dots, b_k , где $k \geq 1$. образуем строки $\lambda_s b_{k+1} + \mu_s b_s$ ($s = 1, \dots, k$), где $\lambda_s, \mu_s > 0$ и выбраны таким образом, что элемент с номером рассматриваемого столбца равен нулю. Очевидно, что такие λ_s и μ_s всегда найдутся,

так как у вектора b_{k+1} соответствующая компонента отрицательна, а у b_s — положительна. Матрица B (3) получается из матрицы B (2) вычеркиванием строки b_{k+1} и добавлением k строк $\lambda_s b_{k+1} + \mu_s b_s$. Из построения видно, что в выбранном столбце матрицы B (3) отрицательных элементов стало на один меньше, чем в матрице B (2), при этом, если какой-нибудь столбец матрицы B (2) состоял только из неотрицательных (неположительных) элементов, то столбец с тем же номером матрицы B (3) также будет состоять только из неотрицательных (неположительных) элементов.

Покажем, что для матрицы B (3) свойство Δ имеет место. Для этого достаточно установить, что неравенство

$$\sum_{s=1}^{S(2)} b_s^i(2) h^s(2) \geq 0 \quad (5.1)$$

ограничивает то же самое множество переменных H (1), что и неравенство

$$\sum_{s=1}^{S(3)} b_s^i(3) h^s(3) \geq 0, \quad (5.2)$$

если переменные h (3) выразить через переменные h (2). Будем считать для определенности, что при получении матрицы B (3) из B (2) на месте $(k+1)$ -строки стала стоять нулевая строка, а все строки вида $\lambda_s b_{k+1} + \mu_s b_s$ приписаны снизу. Тогда неравенство (5.2) переписется в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{S(2)} b_s^i(3) h^s(3) + \\ & + \sum_{s=S(2)+1}^{S(2)+k} h^s(3) (b_{k+1}^i(2) \lambda_{s-S(2)} + b_{s-S(2)}^i(2) \mu_{s-S(2)}) \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда, после приведения подобных членов, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^k (1 + \mu_s) b_s^i(2) (h^s(3) + h^{s+S(2)}(3)) + \\ & + \sum_{s=k+2}^{S(2)} b_s^i(2) h^s(3) + \left[\sum_{s=S(2)+1}^{S(2)+k} \lambda_{s-S(2)} h^s(3) \right] b_{k+1}^i \geq 0. \end{aligned}$$

Если в этом неравенстве положить

$$(1 + \mu_s)(h^s(3) + h^{s+S(2)}(3)) = h^s(2) \quad (s = 1, \dots, k),$$

$$h^s(3) = h^s(2) \quad (s = k + 2, \dots, S(2)),$$

$$\sum_{s=S(2)+1}^{S(2)+k} \lambda_{s-S(2)} h^s(3) = h^{k+1}(2),$$

то оно совпадет с неравенством (5.1). Таким образом, неравенство (5.1) является следствием неравенства (5.2). Обратное очевидно. Поэтому неравенства (5.1) и (5.2) ограничивают одно и то же множество.

Таким образом, мы показали, что описанная операция над матрицей $B(2)$ приводит к матрице $B(3)$, у которой свойство Δ сохраняется. Применяя эту операцию конечное число раз, придем к матрице $B(N)$, у которой все матрицы $A_i(N)$ содержат только неотрицательные элементы.

Действительно, при переходе от $B(2)$ к $B(3)$ в столбце с номером i число отрицательных элементов уменьшилось на единицу. Следовательно, проделав описанную операцию, связанную со столбцом i , столько раз, сколько там отрицательных элементов, в конце концов получим, что i -й столбец состоит только из неотрицательных элементов. Теперь проделаем те же операции над другим столбцом, а, как уже отмечалось выше, свойство неотрицательности столбца i при этом не нарушится. Через N шагов мы придем к искомой матрице $B(N)$. Эта матрица $B(N)$ определяет модель типа Неймана. Матрица $B(N)$ по построению сохраняет структуру матрицы $B(0)$, т. е., в частности, состоит из блоков, по одному блоку для каждого временного интервала. Для любого $t = 0, \dots, T$ возьмем строки блока, относящегося к этому периоду t , заменим в них все отрицательные компоненты на положительные с тем же абсолютным значением. Получившиеся векторы и будут образующими конуса Z_t , участвующего в определении искомой модели типа Неймана.

Ограничения 1) и 2), наложенные на исходную матрицу $\|a_i^j\|$, гарантируют выполнение условия $(0, y) \notin Z_t, y \neq 0$ для всех Z_t .

Образование, графиком которого является Z_t , обозначим через \bar{a}_t . Из построения ясно, что $b_t(x) = \text{Pr}_t a_t(x)$

($t = 1, \dots, T$), где a_t — отображение, определяемое суперпозицией отображений $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{t-1}$.

Действительно, конус Z_t состоит из пар (x, y) таких, что x имеет размерность $n_t + S_t$, y — соответственно $n_{t+1} + S_{t+1}$, где S_t и S_{t+1} — числа, быть может, меньшие S , поскольку при переходе от матрицы $B(0)$ к $B(1)$ некоторые столбцы могли быть вычеркнуты. Поэтому, чтобы получить множество $b_t(x)$, следует взять проекцию $a_t(x)$ на первые n_t координат.

Теорема доказана.

Экономический смысл и интерпретация других (производных) понятий и результатов, относящихся к модели Неймана — Гейла, а также к более общим моделям, дается дальше в тексте по ходу изложения.

§ 6. ТЕМПЫ РОСТА МОДЕЛИ НЕЙМАНА — ГЕЙЛА

1. Состояния равновесия и темпы роста. Неймановский темп роста. Рассмотрим модель Неймана — Гейла Z ($Z \subset R_+^n \times R_+^n$); через a обозначим производственное отображение этой модели.

Говорят, что задано *состояние равновесия* модели Z , если указаны положительное число α , процесс $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ и функционал $\bar{p} \in (R_+^n)^*$ такие, что

$$\alpha \bar{x} \leq \bar{y}; \quad (6.1)$$

$$\bar{p}(y) \leq \alpha \bar{p}(x) \quad \text{для всех } (x, y) \in Z; \quad (6.2)$$

$$\bar{p}(\bar{y}) > 0. \quad (6.3)$$

Обозначим рассматриваемое состояние равновесия через σ . Таким образом, по определению, $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$.

Число $\alpha = \alpha(\sigma)$, фигурирующее в определении состояния равновесия, называется *темпом роста* модели Z (или темпом роста отображения a). Термин «темп роста» носит экономический характер по существу и непосредственно связан с обычным понятием темпа роста, используемым в экономической литературе. Действительно, (\bar{x}, \bar{y}) интерпретируется как набор «продуктов», которые имеются в экономике в смежные периоды времени, функционал \bar{p} интерпретируется как цены, следовательно, $\bar{p}(\bar{x})$ и $\bar{p}(\bar{y})$ — это стоимости наборов «продуктов» \bar{x} и \bar{y} по ценам \bar{p} , их

отношение $\frac{\bar{p}(\bar{y})}{\bar{p}(\bar{x})}$, которое, как показано ниже, совпадает с α , и есть темп роста экономики (темп возрастания стоимости продуктов по ценам \bar{p}).

Отметим сразу же, что условие (6.2) можно записать в виде

$$\frac{1}{\alpha} \bar{p} \in a'(\bar{p}), \quad (6.2')$$

где a' — отображение, двойственное к a .

Полагая в (6.2) $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$ и привлекая (6.3), получим $0 < \bar{p}(\bar{y}) \leq \alpha \bar{p}(\bar{x})$, откуда следует, что $\bar{p}(\bar{x}) > 0$.

В силу (6.1) $\alpha \bar{p}(\bar{x}) \leq \bar{p}(\bar{y})$, и потому, снова используя формулу (6.2) при $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$, имеем $\alpha \bar{p}(\bar{x}) = \bar{p}(\bar{y})$. Учитывая, что $\bar{p}(\bar{x}) > 0$, мы можем выразить теперь темп роста α (σ) через остальные параметры, входящие в состояние равновесия σ : именно

$$\alpha(\sigma) = \frac{\bar{p}(\bar{y})}{\bar{p}(\bar{x})}. \quad (6.4)$$

Предположим теперь, что отображение a нормально. Тогда наряду с σ состоянием равновесия модели Z является и $\bar{\sigma} = (\alpha, (\bar{x}, \alpha \bar{x}), \bar{p})$. Привлекая (6.2'), получим, что положительное число α является в рассматриваемой ситуации темпом роста тогда и только тогда, когда найдутся вектор $\bar{x} \in R_+^n$ и функционал $\bar{p} > 0$, для которых выполняются соотношения

$$\alpha \bar{x} \in a(\bar{x}), \quad \frac{1}{\alpha} \bar{p} \in a'(\bar{p}), \quad \bar{p}(\bar{x}) > 0. \quad (6.5)$$

Рассмотрим модель Неймана — Гейла Z такую, что $R_1 Z = R_+^n$. В этом случае отображение a' , двойственное к a , входит в $A((R_+^n)^*, (R_+^n)^*)$, и потому можно рассматривать a' как производственное отображение некоторой модели Неймана — Гейла Z' . Имеет место

Предложение 6.1. Пусть $a \in A(R_+^n, R_+^n)$. Число α является темпом роста отображения a тогда и только тогда, когда $1/\alpha$ — темп роста отображения a' .

Доказательство. 1) Пусть α — темп роста отображения a , входящий в состояние равновесия $(\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$. Тогда $\alpha \bar{x} \leq \bar{y}$, откуда следует, что

$\alpha \bar{x} \in na(\bar{x}) = a''(\bar{x})$. Из соотношений

$$\frac{1}{\alpha} \bar{p} \in a'(\bar{p}), \quad \alpha \bar{x} \in a''(\bar{x}), \quad \bar{p}(\bar{x}) > 0$$

следует, что $1/\alpha$ — темп роста a' .

2) Пусть β — темп роста отображения a' . Тогда, как следует из первой части предложения, $1/\beta$ — темп роста отображения $a'' = na$. Таким образом, найдутся $\bar{x} \in R_+^n$ и $\bar{p} \in (R_+^n)^*$, для которых $\frac{1}{\beta} \bar{x} \in na(\bar{x})$; $\beta \bar{p} \in (a'')'(\bar{p}) = a'(\bar{p})$, $\bar{p}(\bar{x}) > 0$. По определению нормальной оболочки, существует элемент $\bar{y} \in a(\bar{x})$ такой, что $\frac{1}{\beta} \bar{x} \leq \bar{y}$.

Это означает, что $(\frac{1}{\beta} \bar{x}, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$ является состоянием равновесия отображения a .

Предложение доказано.

Введем в рассмотрение некоторые характеристики модели Неймана — Гейла Z , которые понадобятся при изучении темпов роста этой модели.

Темпом роста процесса $(x, y) \in Z$ назовем число $\alpha(x, y)$, определяемое формулой

$$\alpha(x, y) = \sup \{ \alpha \mid \alpha x \leq y \}. \quad (6.6)$$

Если $x \neq 0$, то $\alpha(x, y) < \infty$; при этом супремум в формуле (6.6) реализуется. Очевидно, $\alpha(0, 0) = +\infty$. Условимся в этой главе символом I обозначать множество индексов $\{1, 2, \dots, n\}$. Если $x \in R_+^n$, то положим $I_x = \{i \in I \mid x^i > 0\}$. Если a — неотрицательное число, $b = 0$, то, по определению, $\frac{a}{b} = \infty$. Используя эти соглашения, можно записать темп $\alpha(x, y)$ в виде

$$\alpha(x, y) = \min_{i \in I} \frac{y^i}{x^i} = \min_{i \in I_x} \frac{y^i}{x^i}.$$

Предложение 6.2. Функция α , определенная на конусе Z формулой $\alpha: (x, y) \rightarrow \alpha(x, y)$, полунепрерывна сверху и положительно однородна нулевой степени (последнее означает, что $\alpha(x, y) = \alpha(\lambda x, \lambda y)$ при $\lambda > 0$).

Доказательство. Положительная однородность нулевой степени функции α очевидна. Покажем полунепрерывность сверху этой функции. Пусть $(x_n, y_n) \in$

$\in Z, (x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. Не умаляя общности, считаем, что $x \neq 0$. Возьмем произвольную предельную точку $\tilde{\alpha}$ последовательности $\alpha(x_n, y_n)$ и выберем из последовательности $((x_n, y_n))$ подпоследовательность $((x_{n_i}, y_{n_i}))$, для которой $\lim \alpha(x_{n_i}, y_{n_i}) = \tilde{\alpha}$. По определению темпа роста процесса,

$$\alpha(x_{n_i}, y_{n_i}) x_{n_i} \leq y_{n_i} \quad (6.7)$$

Из (6.7) сразу следует, что $\tilde{\alpha} < \infty$ (в противном случае $x = 0$). Переходя в (6.7) к пределу, получим, что $\tilde{\alpha} x \leq y$, откуда следует неравенство $\tilde{\alpha} \leq \alpha(x, y)$. Так как $\tilde{\alpha}$ — произвольная предельная точка последовательности $(\alpha(x_n, y_n))$, то $\overline{\lim} \alpha(x_n, y_n) \leq \alpha(x, y)$.

Предложение доказано.

Из предложения 6.2 следует, что функция α достигает максимума на пересечении конуса Z с единичной сферой; кроме того, этот максимум совпадает с наибольшим значением α на множестве $Z \setminus \{0\}$. Сказанное позволяет ввести следующее определение. Число

$$\alpha(Z) = \max_{\substack{(x, y) \in Z \\ \|(x, y)\|=1}} \alpha(x, y) = \max_{\substack{(x, y) \in Z \\ (x, y) \neq 0}} \alpha(x, y)$$

называется *неймановским темпом роста* модели Z . Из условия $\text{Pr}_2 Z \cap \text{int} R_+^n \neq \emptyset$ мгновенно следует, что $\alpha(Z) > 0$. Процесс (x, y) из конуса Z называется *неймановским*, если $\alpha(x, y) = \alpha(Z)$. Заметим, что для неймановского процесса (x, y) выполняется неравенство $\alpha(Z)x \leq y$. Состояние равновесия σ модели Z называется *неймановским*, если $\alpha(\sigma) = \alpha(Z)$.

Неймановский темп роста с экономической точки зрения примечателен тем, что является максимальным, который модель может выдержать сколь угодно долго. Более точно можно сказать так. Пусть дана допустимая траектория $(x_t)_{t=0}^{\infty}$, т. е. $x_{t+1} \in a(x_t)$ для всех t . Темп роста в момент t на этой траектории есть $\alpha(t) = \min_{i \in I} \frac{x_{t+1}^i}{x_t^i}$. Определим темп роста траектории (x_t) как $\inf_t \alpha(t)$. Легко видеть, что если отображение a нормально, то $\alpha(Z) = \max \inf \alpha(t)$,

где \max берется по множеству допустимых траекторий, определяемых отображением a .

Неймановский темп роста (и некоторые его обобщения) являются основным инструментом для исследования темпов роста и состояний равновесия модели Неймана — Гейла. Прежде чем перейти к этому исследованию, приведем несколько примеров.

2. Примеры.

Пример 1. Пусть $A : R^n \rightarrow R^n$ — положительный оператор, не имеющий инвариантных координатных подпространств. (Последнее означает, что матрица оператора A неразложима.) Рассмотрим модель Неймана — Гейла Z , определяемую производственным отображением $a : R_+^n \rightarrow \Pi(R_+^n)$, где

$$a(x) = \langle 0, Ax \rangle = \{y \in R_+^n \mid y \leq Ax\}.$$

Пусть $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$ — состояние равновесия модели Z . Тогда

$$\alpha \bar{x} \leq \bar{y} \leq A\bar{x}; \quad \bar{p}(Ax) \leq \alpha \bar{p}(x) \quad (x \in R_+^n). \quad (6.8)$$

Как известно (см. Гантмахер [1]), неравенство $\alpha \bar{x} \leq A\bar{x}$ при условии неразложимости матрицы оператора A влечет равенство $\alpha \bar{x} = A\bar{x}$. Таким образом, α — собственное число оператора A , \bar{x} — собственный вектор этого оператора. Привлекая первое из соотношений (6.8), получим, что $\bar{y} = \alpha \bar{x} = A\bar{x}$. Записывая второе из этих соотношений в виде $A^* \bar{p} \leq \alpha \bar{p}$ и используя снова теорию неразложимых матриц, получим, что $A^* \bar{p} = \alpha \bar{p}$, т. е. \bar{p} — собственный вектор оператора A^* . Отметим еще, что при наших предположениях \bar{x} и \bar{p} — единственные (с точностью до множителя) неотрицательные собственные векторы операторов A и A^* соответственно; при этом $\bar{x} \gg 0$, $\bar{p} \gg 0$.

Темп роста процесса (x, Ax) запишется в виде $\alpha(x, Ax) = \min_{i \in I} \frac{(Ax)^i}{x^i}$. Отсюда следует, что

$$\alpha(Z) = \max_{x > 0} \min_{i \in I} \frac{(Ax)^i}{x^i}$$

(где $\alpha(Z)$ — неймановский темп роста). Последнее означает, что $\alpha(Z)$ совпадает с единственным положительным собственным числом оператора A (см. Гантмахер [1]). Мы показали, таким образом, что

1) модель Z имеет единственный темп роста, который совпадает с неймановским темпом роста модели (или, что то же самое, собственным числом оператора A);

2) если \bar{x} и \bar{p} — собственные элементы операторов A и A^* соответственно, то каждое состояние равновесия σ модели Z имеет вид

$$\sigma = (\alpha(Z); (\lambda \bar{x}, \lambda A \bar{x}), \mu \bar{p}), \quad \text{где } \lambda, \mu > 0.$$

Пример 2. Рассмотрим модель Неймана Z , где Z — конус в $R_+^5 \times R_+^5$, являющийся конической оболочкой следующих процессов:

$$(x_1, y_1) = (2e_1 + e_2, 9e_1 + 6e_3), (x_2, y_2) = (e_2 + 2e_3, e_1 + 6e_2),$$

$$(x_3, y_3) = (2e_3 + 2e_4 + 4e_5, 4e_1 + e_2 + 4e_3 + 4e_4 + 2e_5),$$

$$(x_4, y_4) = (e_2 + 4e_3 + 4e_4 + 2e_5, e_1 + 4e_3 + 2e_4 + 4e_5),$$

$$(x_5, y_5) = (2e_1 + 2e_4, e_4 + e_5), (x_6, y_6) = (e_2 + 2e_5, e_3).$$

(Здесь e_i обозначает i -й орт пространства R^5 ($i = 1, 2, \dots, 5$)).

Опишем все состояния равновесия этой модели. Для этого найдем ее темпы роста. Если α — темп роста модели Z , то неравенство $\alpha x \leq y$ должно иметь решение хотя бы при одном $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$. Поскольку элементы (x, y) конуса Z имеют вид $(x, y) =$

$= \sum_{i=1}^6 \lambda_i (x_i, y_i)$ (где $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, 6$)), то векторное нера-

венство $\alpha x \leq y$ записывается в координатном виде как следующая система (А) скалярных линейных неравенств:

$$\alpha (2\lambda_1 + 2\lambda_5) \leq 9\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4, \quad (A_1)$$

$$\alpha (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_6) \leq 6\lambda_2 + \lambda_3, \quad (A_2)$$

$$\alpha (2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 4\lambda_4) \leq 6\lambda_1 + 4\lambda_3 + 4\lambda_4 + \lambda_6, \quad (A_3)$$

$$\alpha (2\lambda_3 + 4\lambda_4 + 2\lambda_5) \leq 4\lambda_3 + 2\lambda_4 + \lambda_5, \quad (A_4)$$

$$\alpha (4\lambda_3 + 2\lambda_4 + 2\lambda_6) \leq 2\lambda_3 + 4\lambda_4 + \lambda_5. \quad (A_5)$$

Таким образом, если α — темп роста модели, то система неравенств (А) должна иметь хотя бы одно ненулевое положительное решение.

С другой стороны, число α должно обладать тем свойством, что при некотором $p > 0$ неравенство $p(y) \leq \alpha p(x)$ имеет место для всех $(x, y) \in Z$. Справедливость этого неравенства достаточно проверить лишь на образующих $((x_i, y_i))_{i=1}^6$ конуса Z . Итак, если α — темп роста модели Z , то имеет ненулевое положительное решение следующая система (В):

$$9p^1 + 6p^3 \leq \alpha (2p^1 + p^2), \quad (B_1)$$

$$p^1 + 6p^2 \leq \alpha (p^2 + 2p^3), \quad (B_2)$$

$$4p^1 + p^2 + 4p^3 + 4p^4 + 2p^5 \leq \alpha (2p^3 + 2p^4 + 4p^5), \quad (B_3)$$

$$p^1 + 4p^3 + 2p^4 + 4p^5 \leq \alpha (p^2 + 4p^3 + 4p^4 + 2p^5), \quad (B_4)$$

$$p^4 + p^5 \leq \alpha (2p^1 + 2p^4), \quad (B_5)$$

$$p^3 \leq \alpha (p^2 + 2p^5). \quad (B_6)$$

Нетрудно убедиться в том, что система (В) не имеет решения *) при $\alpha < 1$ (для этого достаточно сложить неравенства (B₃) и (B₄)). Обратимся теперь к системе (А). Непосредственным подсчетом про-

*) Всюду в этом примере под словом решение понимается положительное ненулевое решение рассматриваемых систем.

веряется, что эта система имеет решение при $\alpha = 1$. (Ниже приведены все решения этой системы в данном случае.) Предположим теперь, что эта система имеет решение $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ при $\alpha > 1$. Складывая неравенства (A_4) и (A_5) , убедимся, что в этом случае $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$. Используя это обстоятельство, преобразуем систему (A) в следующую систему (A') (относительно переменных λ_1 и λ_2):

$$2\alpha\lambda_1 \leq 9\lambda_1 + \lambda_2, \quad (A'_1)$$

$$\alpha\lambda_1 + \alpha\lambda_2 \leq 6\lambda_2, \quad (A'_2)$$

$$2\alpha\lambda_2 \leq 6\lambda_1. \quad (A'_3)$$

Заметим, что $\lambda_1 \neq 0$. (В противном случае из (A'_3) следует, что

$\lambda_2 = 0$, а это невозможно, поскольку $\sum_{i=1}^6 \lambda_i > 0$.) Таким же обра-

зом, привлекая (A'_2) , можно показать, что $\lambda_2 \neq 0$. Разделив неравенства (A'_1) , (A'_2) и (A'_3) на λ_1 и исключая отношение λ_2/λ_1 из полученной системы, придем к следующей системе неравенств относительно α :

$$\alpha(2\alpha - 9) \leq 3, \quad \frac{\alpha^2}{6 - \alpha} \leq 3. \quad (6.9)$$

Решая систему (6.9), получим, что среди чисел, больших единицы, темпами роста модели могут быть лишь точки из полуинтервала $(1, 3]$. Кроме этих точек в проверке нуждается лишь число 1 (оно также может быть темпом роста).

Пусть $\alpha \in (1, 3)$. Предположим, что это число является темпом роста модели, и пусть $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$ — состояние равновесия с темпом роста α . Напомним, что по определению состояния равновесия $\bar{p}(\bar{y}) > 0$. (Иными словами, найдется хотя бы один индекс i ($1 \leq i \leq 5$), при котором $\bar{p}^i > 0$, $\bar{y}^i > 0$.) Пусть $(x, y) =$

$= \sum_{i=1}^6 \bar{\lambda}_i(x_i, y_i)$. Так как $\alpha > 1$, то $\bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_4 = \bar{\lambda}_5 = \bar{\lambda}_6 = 0$, и пото-

му $\bar{y} = \bar{\lambda}_1 y_1 + \bar{\lambda}_2 y_2 = (9\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2)e_1 + 6\bar{\lambda}_2 e_2 + 6\bar{\lambda}_1 e_3$. Таким образом, $\bar{y}^4 = \bar{y}^5 = 0$. С другой стороны, складывая неравенства (B_1) и (B_2) и учитывая, что $\alpha < 3$, убедимся в справедливости равенств $\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \bar{p}_3 = 0$. Мы показали, что $\bar{p}(\bar{y}) = 0$; стало быть, наше предположение было неверным, т. е. среди чисел из интервала $(1, 3)$ нет темпов роста.

Покажем теперь, что числа $\alpha = 1$ и $\alpha = 3$ являются темпами роста модели, и опишем все состояния равновесия, отвечающие этим темпам.

1) Пусть $\alpha = 1$. Нетрудно проверить, что при $\alpha = 1$ система (B) имеет решения лишь вида $(\mu, \bar{p}_1)_{\mu > 0}$, где $\bar{p}_1 = (0, 0, 0, 1, 1)$. Рассмотрим теперь систему (A) . Из неравенств (A_4) и (A_5) при $\alpha = 1$ следует, что $\lambda_6 = 0$; $2\lambda_3 = 2\lambda_4 + \lambda_5$; используя это обстоятельство,

систему (A) можно переписать в рассматриваемом случае следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &\leq 5\lambda_2 + \frac{1}{2} \lambda_5, \\ \lambda_2 &\leq 3\lambda_1 + \lambda_4 + \frac{1}{2} \lambda_5, \\ 2\lambda_4 + \lambda_5 &= 2\lambda_3, \\ \lambda_6 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Система (6.10) имеет решения. Пусть $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^6 \lambda_i (x_i, y_i)$, где $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6)$ — решение системы (6.10). Тогда если $\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 > 0$, то $p(\bar{y}) > 0$; в противном случае $\bar{p}(\bar{y}) = 0$. Таким образом, число $\alpha = 1$ является темпом роста модели; состояния равновесия σ , отвечающие этому темпу, могут быть описаны следующим образом:

$$\sigma = (1, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}),$$

где $\bar{p} = (0, 0, 0, \mu, \mu)$ ($\mu > 0$); $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^5 \lambda_i (x_i, y_i)$, где числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5$ являются решением системы

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq 5\lambda_2 + \frac{1}{2} \lambda_5, \\ \lambda_2 &\leq 3\lambda_1 + \lambda_4 + \frac{1}{2} \lambda_5, \\ 2\lambda_4 + \lambda_5 &= 2\lambda_3, \\ 0 &< \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5. \end{aligned}$$

2) $\alpha = 3$. Как было показано выше, решение $(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$ системы (A) в случае, если $\alpha > 1$, обладает тем свойством, что $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$; при этом числа λ_1 и λ_2 удовлетворяют системе (A'), решениями которой в нашем случае ($\alpha = 3$) являются пары чисел (λ_1, λ_2) такие, что $\lambda_1 = \lambda_2$. Таким образом, если $\alpha = 3$ — темп роста и процесс (\bar{x}, \bar{y}) входит в состояние равновесия, отвечающее этому темпу, то $(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda (2e_1 + 2e_2 + 2e_3, 10e_1 + 6e_2 + 6e_3)$ (где $\lambda > 0$). Рассмотрим теперь систему (B) при $\alpha = 3$. Из неравенств (B₁) и (B₂) сразу следует, что $p^1 = 0$; $p^2 = 2 p^3$. Используя это обстоятельство, легко получить, что координаты функционала p являются решениями системы (B) при $\alpha = 3$ тогда и только тогда, когда $p^1 = 0$, $p^2 = 2p^3$, $p^5 \leq 5p^4$; при этом $p(\bar{y}) > 0$ в том и только том случае, когда $p^3 > 0$.

Таким образом, число $\alpha = 3$ является темпом роста модели Z. Состояния равновесия σ , отвечающие этому темпу роста, имеют вид

$$\sigma = (3, \lambda (2e_1 + 2e_2 + 2e_3, 10e_1 + 6e_2 + 6e_3), (0, 2v, v, \chi, \omega)), \quad (6.11)$$

где $\lambda > 0$, $v > 0$, $0 \leq \omega \leq 5\chi$.

Мы описали все состояния равновесия модели Z . Заметим, что эти состояния никак не зависят от процесса (x_6, y_6) . (Иными словами, σ является состоянием равновесия модели Z тогда и только тогда, когда σ — состояние равновесия модели \bar{Z} , где \bar{Z} — конус, натянутый на пары (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

Отметим еще, что темп роста $\alpha = 3$ модели Z является и неймановским темпом роста $\alpha(Z)$ этой модели. В самом деле, три — это наибольшее значение параметра α , при котором система неравенств (A) имеет решение. Из сказанного следует, что состояние равновесия σ , определенное формулой (6.11), является неймановским. Неймановский процесс модели Z единствен (с точностью до множителя) и совпадает с парой $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

П р и м е р 3. Пусть f — строго вогнутая функция, определенная на $[0, +\infty)$ и такая, что $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. В конусе

$R_+^2 \times R_+^2$ рассмотрим множество Ω , состоящее из пар $((u, 1), (u+1, \lambda))$, где $u \geq 0$, $\lambda \leq f(u)$. Очевидно, что Ω выпукло. Конус Z , совпадающий с замыканием конической оболочки $Co(\Omega)$ множества Ω , является, как нетрудно показать, моделью Неймана — Гейла. Непосредственно проверяется, что кроме лучей $(\mu z)_{\mu \geq 0}$, где $z \in \Omega$, конус Z содержит лишь луч, проходящий через точку $((1, 0), (1, 0))$. Найдем неймановский темп роста модели Z . Пусть $(x, y) \in Z$, $(x, y) = ((u, 1), (u+1, \lambda))$. Тогда

$$\alpha(x, y) = \min \left(\frac{u+1}{u}, \lambda \right) = \lambda.$$

В рассматриваемой ситуации функция f строго возрастает, и потому $\lambda \leq f(u) < 1$. Если же $(x, y) = ((1, 0), (1, 0))$, то $\alpha(x, y) = 1$. Итак,

$$\alpha(Z) = \max_{(x, y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x, y) = 1.$$

При этом модель Z имеет единственный (с точностью до множителя) неймановский процесс $((1, 0), (1, 0))$.

Предположим, что $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$ является состоянием равновесия модели Z . Рассмотрим отдельно два случая, в зависимости от того, совпадает (\bar{x}, \bar{y}) с неймановским процессом или нет.

$$1) (\bar{x}, \bar{y}) = ((\bar{u}, 1), (\bar{u} + 1, \bar{\lambda})) \text{ (где } \bar{u} \geq 0, 0 \leq \bar{\lambda} \leq f(\bar{u}) \text{)}.$$

По определению состояния равновесия, должны выполняться, в частности, следующие неравенства:

$$\alpha \bar{a} \leq \bar{a} + 1, \alpha \leq \bar{\lambda}; \quad (6.12)$$

$$\bar{p}^1(u+1) + \bar{p}^2 f(u) \leq \alpha \bar{p}^1 u + \alpha \bar{p}^2 \quad (u \geq 0). \quad (6.13)$$

Из (6.12) следует, что $\alpha < 1$, и потому $f(u) > \alpha$ при достаточно больших u . Перепишывая (6.13) в виде

$$(1 - \alpha) \bar{p}^1 u + \bar{p}^1 \leq \bar{p}^2 (\alpha - f(u)) \quad (u \geq 0),$$

убедимся в том, что это неравенство возможно лишь при $\bar{p}^1 = \bar{p}^2 = 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае σ не является состоянием равновесия.

2) $(\bar{x}, \bar{y}) = ((1, 0), (1, 0))$. Снова используя определение состояния равновесия, получим

$$(1 - \alpha) \bar{p}^1 u + \bar{p}^1 \leq \bar{p}^2 (\alpha - f(u)) \quad (u \geq 0), \quad (6.14)$$

$$\bar{p}(\bar{y}) = \bar{p}^1 > 0. \quad (6.15)$$

Выше уже отмечалось, что случай $\alpha < 1$ невозможен. Пусть $\alpha = 1$. Тогда, в силу (6.14),

$$\bar{p}^1 \leq \bar{p}^2 (1 - f(u)) \quad (u \geq 0).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, получим, что $\bar{p}^1 = 0$, а это противоречит (6.15).

Мы показали, что модель Z не имеет темпов роста.

3. Неймановское состояние равновесия. Из результатов предыдущего пункта следует, что модель Неймана — Гейла, вообще говоря, может и не иметь состояний равновесия. В то же время примеры 1 и 2 показывают, что одним из темпов роста модели может быть неймановский темп роста. В связи с этим представляет интерес выяснить вопрос о существовании неймановского состояния равновесия. Отметим прежде всего одно важное свойство неймановского темпа роста.

Предложение 6.3. Пусть Z — модель Неймана — Гейла ($Z \subset R_+^n \times R_+^n$). Тогда найдется функционал $\bar{p} > 0$ такой, что для всех $(x, y) \in Z$

$$\bar{p}(y) \leq \alpha(Z) \bar{p}(x) \quad (6.16)$$

(где $\alpha(Z)$ — неймановский темп роста модели Z).

Доказательство. Рассмотрим в пространстве R^n множество $C = \{y - \alpha(Z)x \mid (x, y) \in Z\}$. Так как Z — выпуклый конус, то и C является выпуклым конусом. Из определения неймановского темпа роста следует, что $C \cap \text{int } R_+^n = \emptyset$, и потому существует функционал \bar{p} такой, что $\bar{p} \neq 0$ и

$$\max_{z \in C} \bar{p}(z) = 0 = \min_{u \in R_+^n} \bar{p}(u).$$

Функционал \bar{p} обладает требуемыми свойствами,

Предложение доказано.

З а м е ч а н и е. В дальнейшем нам понадобится следующее

П р е д л о ж е н и е 6.3'. Пусть Z — выпуклый конус в $R_+^n \times R_+^n$ и число β таково, что

$$\sup_{(x, y) \in Z, (x, y) \neq 0} \min_{i \in I} \frac{y^i}{x^i} \leq \beta < \infty.$$

Тогда найдется функционал $\bar{p} > 0$ такой, что $\bar{p}(y) \leq \beta \bar{p}(x)$ для всех $(x, y) \in Z$.

Доказательство этого утверждения полностью совпадает с доказательством предложения 6.3.

Из предложения 6.3 следует, что $(\alpha(Z), (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$, где (\bar{x}, \bar{y}) — какой-либо неймановский процесс, \bar{p} — функционал, фигурирующий в предложении, обладает всеми свойствами состояния равновесия, кроме, может быть, условия $\bar{p}(\bar{y}) > 0$. Таким образом, вопрос о существовании неймановского состояния равновесия сводится к отысканию функционала \bar{p} , удовлетворяющего условию (6.16) и такого, что $\bar{p}(\bar{y}) > 0$ хотя бы для одного неймановского процесса (\bar{x}, \bar{y}) . При этом удобнее всего рассматривать неймановский процесс, у которого \bar{y} имеет наибольшее (по включению) множество координат, отличных от нуля. Существование такого процесса гарантирует следующее простое

П р е д л о ж е н и е 6.4. Пусть Z — модель Неймана — Гейла и положительное число α таково, что множество $C_\alpha = \{(x, y) \in Z \mid \alpha x \leq y\}$ непусто. Тогда найдется процесс $(\bar{x}, \bar{y}) \in C_\alpha$ такой, что *) $I_{\bar{x}} \supset I_x$, $I_{\bar{y}} \supset I_y$ для любого процесса (x, y) из C_α .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В множестве C_α найдется лишь конечное число процессов (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \dots, m$), обладающих тем свойством, что множества $I_{x_i} \times I_{y_i}$ попарно различны. В качестве искомого процесса (\bar{x}, \bar{y})

можно принять сумму $\sum_{i=1}^m (x_i, y_i)$.

Предложение доказано.

Приведем теперь теорему, дающую достаточные условия существования неймановского состояния равновесия. Мы специально приводим доказательство теоремы, не опи-

*) Напомним, что $I_x = \{i \in I \mid x^i > 0\}$ для $x \in R_+^n$.

рающееся на предложение 6.3 (и не являющееся самым коротким), с тем чтобы показать, что ситуация здесь такова же, что и в теореме Куна — Таккера из теории выпуклого программирования.

Теорема 6.1. Пусть Z — модель Неймана — Гейла и выполнено хотя одно из следующих двух условий:

- 1) конус Z многогранен (т. е. Z — модель Неймана),
- 2) существует неймановский процесс (x, y) такой, что $y \gg 0$. Тогда модель Z обладает неймановским состоянием равновесия.

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha(Z)$, (\bar{x}, \bar{y}) — неймановский процесс, у которого $I_{\bar{x}} \supset I_x$, $I_{\bar{y}} \supset I_y$ для любого неймановского процесса (x, y) . Рассмотрим множество $V_1 \subset R^n \times R^n \times R^1$, состоящее из всех векторов вида $(-\alpha x, y, 0)$ (где $(x, y) \in Z$), всех векторов вида $(y, -\alpha x, 0)$ ($(x, y) \in Z$) и вектора $(0, -\alpha \bar{x}, 1)$. Через V обозначим коническую оболочку объединения множеств V_1 и $(R_+^n \times R_+^n \times R_+^1)$. Нетрудно проверить что $(u, v, \mu) \in V$ тогда и только тогда, когда

$$(u, v, \mu) = (u_1, v_1, \mu_1) + (u_2, v_2, \mu_2) + \lambda (u_3, v_3, \mu_3),$$

где $u_1 \leq -\alpha x_1$, $v_1 \leq y_1$, $\mu_1 \leq 0$, $u_2 \leq y_2$, $v_2 \leq -\alpha x_2$, $\mu_2 \leq 0$, $u_3 \leq 0$, $v_3 \leq -\alpha \bar{x}$, $\mu_3 \leq 1$, $\lambda \geq 0$ (здесь (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — процессы модели Z).

Сформулируем теперь задачу (Δ) выпуклого программирования:

максимизировать μ при условии

$$(-\alpha \bar{x}, 0, \mu) \in V.$$

Найдем решение этой задачи. Если $(-\alpha \bar{x}, 0, \mu) \in V$, то, как следует из сказанного выше,

$$-\alpha \bar{x} = u_1 + u_2 + \lambda u_3, \quad 0 = v_1 + v_2 + \lambda v_3,$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \lambda \mu_3,$$

причем для некоторых процессов (x_1, y_1) и (x_2, y_2) из Z выполняются неравенства $u_1 \leq -\alpha x_1$, $u_2 \leq y_2$, $u_3 \leq 0$, $v_1 \leq y_1$, $v_2 \leq -\alpha x_2$, $v_3 \leq -\alpha \bar{x}$; кроме того, $\mu_1 \leq 0$, $\mu_2 \leq 0$, $\mu_3 \leq 1$, $\lambda \geq 0$. Таким образом, процессы (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и числа λ, μ удовлетворяют неравенствам

$$-\alpha \bar{x} \leq -\alpha x_1 + y_2, \quad \lambda \alpha \bar{x} \leq y_1 - \alpha x_2, \quad \mu \leq \lambda. \quad (6.17)$$

Из сказанного следует, что оптимальное значение задачи (Δ) совпадает с наибольшим из чисел λ , обладающих тем свойством, что при некоторых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Z$ имеют место неравенства (6.17).

Если $\lambda = 1$, то эти неравенства справедливы (например, для процессов $(x_1, y_1) = (\bar{x}, \bar{y}), (x_2, y_2) = (0, 0)$). Покажем, что при $\lambda > 1$ никакая пара процессов $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ не удовлетворяет этим неравенствам. В самом деле, предполагая противное, найдем соответствующие процессы $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$; из соотношений (6.17) получим

$$\alpha(x_1 + x_2) \leq \alpha(\lambda - 1)\bar{x} + \alpha(x_1 + x_2) \leq y_1 + y_2, \quad (6.18)$$

откуда следует, что процесс $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ — неймановский. Вспоминая определение процесса (\bar{x}, \bar{y}) , убедимся в справедливости соотношения $I_{\bar{x}} \supset I_{x_1+x_2}$; это соотношение показывает, что при достаточно малом положительном ν

$$\bar{x} \geq \nu(x_1 + x_2). \quad (6.19)$$

Объединяя (6.19) и (6.18), имеем

$$y_1 + y_2 \geq \alpha(1 + \nu(\lambda - 1))(x_1 + x_2),$$

что невозможно, так как α совпадает с неймановским темпом роста $\alpha(Z)$.

Таким образом, оптимальное значение задачи (Δ) равно 1. Это означает, что точка $v_0 = (-\alpha\bar{x}, 0, 1)$ лежит на границе выпуклого телесного конуса V .

Покажем, что для задачи (Δ) выполнены условия теоремы Куна — Таккера. Если выполнено условие 1) теоремы, то конус V многогранен. Если выполнено условие 2) теоремы, то этот конус содержит внутреннюю точку вида $(-\alpha\bar{x}, 0, \mu)$. (Такой является, например, точка $(-\alpha\bar{x}, 0, 0)$; в самом деле, если выполнено это условие, то $\bar{y} \geq 0$. Пусть процесс (x, y) из Z таков, что $y \geq 0, \bar{y} - \alpha x \geq 0$. Элемент $z = (-\alpha\bar{x} + y, \bar{y} - \alpha x, 1)$ входит в V . В то же время, $z \geq (-\alpha\bar{x}, 0, 0)$. Так как V с каждым своим элементом содержит и все меньшие, то $(-\alpha\bar{x}, 0, 0)$ входит в V с некоторой своей окрестностью.) Итак, если выполнены условия нашей теоремы, то задача (Δ) удовлетворяет условиям теоремы Куна — Таккера (точнее говоря, одного из вариантов этой теоремы (см. п. 9 § 1). В силу указанной теоре-

мы найдется функционал $\pi = (p_1, p_2, \gamma) > 0$, удовлетворяющий условию $\max_{v \in V} \pi(v) = \pi(v_0) = 0$ и такой, что $\gamma > 0$. Из условия $\max_{v \in V} \pi(v) = 0$ следует, в частности, что для $(x, y) \in Z$

$$\alpha p_1(x) \geq p_2(y), \quad p_1(y) \leq \alpha p_2(x),$$

и потому $\alpha(p_1 + p_2)(x) \geq (p_1 + p_2)(y)$ для $(x, y) \in Z$. Так как $\pi(v_0) = 0$, то $-p_1(\alpha x) + \gamma = 0$, откуда следует, что $(p_1 + p_2)(\bar{y}) \geq (p_1 + p_2)(\alpha \bar{x}) > 0$. Итак, мы показали, что $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), p_1 + p_2)$ является состоянием равновесия.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Условия теоремы, как легко видеть, не являются необходимыми. По существу здесь возникает та же ситуация, что и в теореме Куна — Таккера; точнее говоря, условия теоремы 6.1 являются соответствующим образом переформулированными условиями, гарантирующими выполнение теоремы Куна — Таккера.

Вместо условия 2) теоремы можно потребовать выполнение несколько более слабого условия: существуют неймановский процесс (\bar{x}, \bar{y}) и конечная последовательность $(\bar{x}, x_1, \dots, x_T)$ такие, что $x_T \gg \gg 0$, $(\bar{x}, x_1) \in Z$, $(x_t, x_{t+1}) \in Z$ ($t = 1, 2, \dots, T-1$). При этом для задачи (Δ) по-прежнему имеет место теорема Куна — Таккера. Впрочем, существование неймановского равновесия в указанном случае вытекает непосредственно из предложения 6.3.

4. Расположение состояний равновесия модели Неймана — Гейла. Конечность числа темпов роста модели. В этом пункте мы опишем все темпы роста и состояния равновесия модели Неймана — Гейла Z . Это описание проводится с помощью некоторой конструкции, которая излагается ниже. Предварительно обобщим понятие неймановского темпа роста и неймановского процесса на некоторые выпуклые конусы, вообще говоря, не являющиеся моделями Неймана — Гейла. Пусть Z — выпуклый конус, лежащий в $R_+^n \times R_+^n$ и такой, что $\text{Pr}_2 Z \cap \text{int } R_+^n \neq \emptyset$. Неймановским темпом роста конуса Z назовем число *)

$$\alpha = \sup_{(x, y) \in Z, (x, y) \neq 0} \min_{i \in I} \frac{y^i}{x^i}. \quad (6.20)$$

Заметим, что α может равняться и $+\infty$, однако всегда

*) Напомним, что $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

$\alpha > 0$. Если Z — модель Неймана — Гейла, то α совпадает с введенным ранее неймановским темпом $\alpha(Z)$.

Последовательность $((x_k, y_k))$ элементов конуса Z назовем *неймановской*, если $\min_{i \in I} \frac{y_k^i}{x_k^i} \rightarrow \alpha$. Введем в рассмотрение множество индексов $I_Z \subset I$. Номер $i \in I_Z$ тогда и только тогда, когда найдется неймановская последовательность $((x_k, y_k))$ такая, что $y_k^i > 0$ ($k = 1, 2, \dots$).

Пусть Z — модель Неймана — Гейла. Конус Z порождает конечную последовательность конусов Z_1, Z_2, \dots, Z_N следующим образом. Положим $Z_1 = Z$, обозначим $R_+^n = \Gamma_1$. Таким образом, $Z_1 \subset \Gamma_1 \times \Gamma_1$; если $I^1 \equiv I_{Z_1} = I$, то процесс окончен; если $I^1 \neq I$, то рассмотрим грань Γ_2 конуса R_+^n , натянутую на орты с номерами из $I \setminus I^1$, и определим Z_2 как проекцию конуса Z_1 на грань $\Gamma_2 \times \Gamma_2$ конуса $R_+^n \times R_+^n$. Если $I^2 \equiv I_{Z_2} = I \setminus I^1$, то процесс окончен; в противном случае рассмотрим грань Γ_3 конуса R_+^n , натянутую на орты с номерами из $I \setminus (I^1 \cup I^2)$, и обозначим через Z_3 проекцию Z_2 на грань $\Gamma_3 \times \Gamma_3$ конуса $R_+^n \times R_+^n$. Если $I^3 \equiv I_{Z_3} \neq I \setminus (I^1 \cup I^2)$, то строим конус Z_4 и т. д. Этот процесс закончится на некотором шаге N .

В результате у нас построены конусы Z_ν и множества индексов I^ν ($\nu = 1, 2, \dots, N$), причем $I^\nu \equiv I_{Z_\nu}$, $I^\nu \cap I^{\nu'} = \emptyset$ ($\nu \neq \nu'$), $\bigcup_{\nu=1}^N I^\nu = I$. Через α_ν обозначим неймановский темп роста конуса Z_ν . Заметим, что $\alpha_\nu > 0$.

Имеет место

Л е м м а 6.1. Для любого номера ν и любого $\varepsilon > 0$ найдется процесс $(x, y) \in Z$ такой, что

$$1) \quad \min_{\mu=1, 2, \dots, \nu} \alpha_\mu - \min_{i \in I} (y^i/x^i) \leq \varepsilon,$$

2) если $\nu < N$, то $x^i = y^i = 0$ для всех $i \in \bigcup_{\mu=\nu+1}^N I^\mu$ и $y^i > 0$ для всех $i \in \bigcup_{\mu=1}^{\nu} I^\mu$; если $\nu = N$, то $y^i > 0$ для всех $i \in I$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $((x_k, y_k))$ — неймановская последовательность элементов конуса Z_ν

($\nu < N$). Покажем, что найдется k' такое, что $y_k^i = x_k^i \equiv 0$ при всех $k \geq k'$ и $i \in \bigcup_{\mu=\nu+1}^N I^\mu$. Предполагая противное, можно, не умаляя общности, считать, что для некоторого $j \in \bigcup_{\mu=\nu+1}^N I^\mu$ при всех k выполняется одно из двух соотношений:

а) $y_k^j > 0$, б) $y_k^j = 0$, но $x_k^j > 0$.

В первом случае, однако, $j \in I^\nu$, что невозможно, так как $I^\mu \cap I^{\mu'} = \emptyset$ при $\mu \neq \mu'$; во втором случае $\min_{i \in I} (y_k^i/x_k^i) = 0$, что также невозможно, ибо $\min_{i \in I} (y_k^i/x_k^i) \rightarrow \alpha_\nu$.

Таким образом, нужное нам число k' существует. Отметим еще, что поскольку Z_ν — выпуклый конус, то, рассуждая так же, как при доказательстве предложения 6.4, можно показать, что найдется неймановская последовательность $((\tilde{x}_k, \tilde{y}_k))$, для которой $\tilde{y}_k^i > 0$ при всех k и всех $i \in I^\nu$.

Из сказанного легко вытекает следующее: по любому $\varepsilon > 0$ найдется процесс $(x_\nu, \bar{y}_\nu) \in Z$ такой, что $x_\nu^i = \bar{y}_\nu^i = 0$, если $\nu < N, i \in \bigcup_{\mu=\nu+1}^N I^\mu$; $\bar{y}_\nu^i > 0$, если $i \in I^\nu$; $\min_{i \in I^\nu} (\bar{y}_\nu^i/x_\nu^i) > \alpha_\nu - \varepsilon$, если $\alpha_\nu < \infty$. В качестве (x_ν, \bar{y}_ν) можно взять, например, достаточно далекий член неймановской последовательности $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$, рассмотренной выше.

2) Будем считать, простоты ради, что $\nu < N$ и $\alpha_\nu < \infty$, и покажем, что существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ такие, что процесс

$$(x, y) = \sum_{\mu=1}^{\nu} \lambda_\mu (x_\mu, \bar{y}_\mu)$$

обладает требуемыми в лемме свойствами (здесь (x_μ, \bar{y}_μ) ($\mu = 1, 2, \dots, \nu$) — процессы, определенные в первой части доказательства). Положим $\lambda_\nu = 1$. Заметим теперь, что найдется такое достаточно большое число λ , что для процесса $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lambda (x_{\nu-1}, \bar{y}_{\nu-1}) + \lambda_\nu (x_\nu, \bar{y}_\nu)$ выполнено

соотношение

$$\min_{i \in \bigcup_{\mu=v-1}^N I^\mu} \frac{\tilde{y}^i}{\tilde{x}^i} \geq \min(\alpha_{v-1}, \alpha_v) - 2\varepsilon. \quad (6.21)$$

В самом деле, если $i \in I^\mu$ ($\mu > v$), то $\tilde{y}^i = \tilde{x}^i = 0$, а потому $\tilde{y}^i/\tilde{x}^i = \infty$; если $i \in I^v$, то $\tilde{x}^i = \bar{x}_v^i$, $\tilde{y}^i = \bar{y}_v^i$, и, следовательно, $\tilde{y}^i/\tilde{x}^i \geq \alpha_v - \varepsilon$; если же $i \in I^{v-1}$, то отношение $\tilde{y}^i/\tilde{x}^i = \frac{\lambda \bar{y}_{v-1}^i + \bar{y}_v^i}{\lambda \bar{x}_{v-1}^i + \bar{x}_v^i}$ может быть за счет выбора λ сделано сколь угодно близким к отношению $\bar{y}_{v-1}^i/\bar{x}_{v-1}^i$. Используя определение процесса $(\bar{x}_{v-1}, \bar{y}_{v-1})$, можно найти λ , при котором выполнено (6.21). Обозначим найденное число λ через λ_{v-1} . Подобным же образом найдем $\lambda_{v-2}, \lambda_{v-3}, \dots, \lambda_1$.

Лемма доказана.

Через Γ_v обозначим грань конуса R_+^n , натянутую на орты с номерами *) $i \in \bigcup_{\mu=v}^N I^\mu$. Заметим, что $Z_v \subset \Gamma_v \times \Gamma_v$, причем $Z_v \cap \text{гг } \Gamma_v \neq \emptyset$ ($v = 1, 2, \dots, N$).

Будем говорить, что конус Z_v имеет *неймановское состояние равновесия*, если найдутся процесс $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_v$ и функционал $p \in \Gamma_v^*$ (где Γ_v^* — конус, сопряженный к Γ_v в пространстве $(\Gamma_v - \Gamma_v)$ *) такие, что 1) $\bar{y} \geq \alpha_v \bar{x}$, 2) $p(\bar{y}) \leq \alpha_v p(\bar{x})$ ($\bar{x}, \bar{y} \in Z_v$), 3) $p(\bar{y}) > 0$. (Если Z_v — модель Неймана — Гейла, то это определение совпадает с данным в п. 1.)

Определим подмножество \mathcal{L} множества $\{1, 2, \dots, N\}$ следующим образом: $v \in \mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда конус Z_v обладает неймановским состоянием равновесия и (если $v > 1$) при всех $\mu < v$ выполняется неравенство $\alpha_\mu > \alpha_v$.

Имеет место

Теорема 6.2. *Для того чтобы число α являлось темпом роста модели Неймана — Гейла Z , необходимо и, достаточно, чтобы нашелся номер $v \in \mathcal{L}$ такой, что $\alpha = \alpha_v$.*

*) Эта грань уже рассматривалась выше (при определении конусов Z_v).

Прежде чем перейти к доказательству, приведем два следствия из этой теоремы.

С л е д с т в и е 1. *Модель Z имеет темпы роста тогда и только тогда, когда $\mathcal{L} \neq \emptyset$.*

С л е д с т в и е 2. *Модель Z может иметь лишь конечное число темпов роста.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 6.2. 1) Покажем сначала, что α_ν ($\nu \in \mathcal{L}$) является темпом роста модели Z. Пусть $(\alpha_\nu, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$ — неймановское состояние равновесия конуса Z_ν . Напомним, что \bar{p} задан в пространстве $\Gamma_\nu - \Gamma_\nu$. Через p_ν обозначим функционал, заданный на всем R^n , совпадающий с \bar{p} на $\Gamma_\nu - \Gamma_\nu$ и равный нулю на дизъюнктном *) к $\Gamma_\nu - \Gamma_\nu$ дополнении. Очевидно, $p_\nu(y) \leq \alpha_\nu p_\nu(x)$ для любых $(x, y) \in Z$. Заметим, что существует процесс $(x, \bar{y}) \in Z$, проекция которого на $\Gamma_\nu - \Gamma_\nu$ совпадает с (\bar{x}, \bar{y}) . Из определения состояния равновесия легко следуют соотношения

$$\min_{i \in \bigcup_{\mu=\nu}^N I^\mu} (\bar{y}^i / \bar{x}^i) = \min_{i \in \bigcup_{\mu=\nu}^N I^\mu} (\bar{y}^i / \bar{x}^i) = \alpha_\nu.$$

Привлекая лемму 6.1 и учитывая неравенства $\alpha_\mu > \alpha_\nu$ ($\mu < \nu$), найдем процесс $(x, y) \in Z$, для которого $y^i > 0$ ($i \in \bigcup_{\mu=1}^{\nu-1} I^\mu$),

$$y^i = x^i = 0 \quad \left(i \in \bigcup_{\mu=\nu}^N I^\mu \right), \quad \min_{i \in I} (y^i / x^i) > \alpha_\nu.$$

Рассмотрим теперь процесс $(x_\nu, y_\nu) = (\bar{x}, \bar{y}) + \lambda(x, y)$, где множитель λ выбран настолько большим, что выполнено соотношение $\min_{i \in I} (y_\nu^i / x_\nu^i) = \alpha_\nu$. Очевидно, $y_\nu \geq \alpha_\nu x_\nu$; кроме того, $p_\nu(y_\nu) > 0$. Таким образом, $(\alpha_\nu, (x_\nu, y_\nu), p_\nu)$ является состоянием равновесия и, стало быть, α_ν — темп роста модели Z.

2) Покажем теперь, что каждый темп роста $\hat{\alpha}$ модели Z совпадает с одним из чисел α_ν ($\nu \in \mathcal{L}$). Пусть $(\hat{\alpha}, (\hat{x}, \hat{y}), \hat{p})$ — состояние равновесия модели Z. Положим

$$\hat{I} = \{i \in I \mid \hat{y}^i / \hat{x}^i = \hat{\alpha}, \hat{p}^i > 0\}.$$

*) Под *дизъюнктным дополнением подпространства*, натянутого на орты с номерами из некоторого множества $I' \subset I$, понимается подпространство, натянутое на орты с номерами из $I \setminus I'$.

Из определения состояния равновесия и равенства (6.4) вытекает, что $\hat{I} \neq \emptyset$; $\hat{y}^i/\hat{x}^i = \min_{j \in \hat{I}} (\hat{y}^j/\hat{x}^j)$, если $i \in \hat{I}$;

$\hat{p}^i = 0$, если $i \notin \hat{I}$.

Обозначим через ν первый из номеров μ , обладающих тем свойством, что $I^\mu \cap \hat{I} \neq \emptyset$. Очевидно, $\hat{I} \subset \bigcup_{\mu=\nu}^N I^\mu$. Кроме того, если $\nu > 1$, то, как следует из сказанного выше, $\hat{p}^i = 0$ для $i \in \bigcup_{\mu=1}^{\nu-1} I^\mu$. Из соотношения

$$\alpha_\nu = \sup_{(x, y) \in Z, (x, y) \neq 0} \min_{i \in \bigcup_{\omega=\nu}^N I^\omega} \frac{y^i}{x^i}$$

вытекает неравенство $\alpha_\nu \geq \hat{\alpha}$. Если $\alpha_\nu > \hat{\alpha}$, то найдется процесс $(x, y) \in Z$, для которого $y^i > \hat{\alpha}x^i$ при всех $i \in \bigcup_{\mu=\nu}^N I^\mu$. Учитывая свойства функционала \hat{p} , получим

$$\hat{p}(y) > \hat{\alpha}\hat{p}(x),$$

что невозможно. Таким образом, $\hat{\alpha} = \alpha_\nu$.

Пусть $\nu \neq 1$ и $\mu < \nu$. Тогда $\bigcup_{\omega=\mu}^N I^\omega \supset \hat{I}$, и потому

$$\alpha_\mu = \sup_{(x, y) \in Z \setminus \{0\}} \min_{i \in \bigcup_{\omega=\mu}^N I^\omega} \frac{y^i}{x^i} \geq \min_{i \in \bigcup_{\omega=\mu}^N I^\omega} \frac{\hat{y}^i}{\hat{x}^i} = \hat{\alpha}.$$

Предположим, что $\alpha_\mu = \hat{\alpha}$. В этом случае проекция (\hat{x}, \hat{y}) пары (\hat{x}, \hat{y}) на грань $\Gamma_\mu \times \Gamma_\mu$ является неймановским процессом (т. е. стационарной неймановской последовательностью) конуса Z_μ . Отсюда следует, что $\hat{I} \subset I^\mu$. Так как, кроме того, $\hat{I} \cap I^\nu \neq \emptyset$, то и $I^\mu \cap I^\nu \neq \emptyset$, что невозможно. Из полученного противоречия вытекают неравенства $\alpha_\mu > \alpha_\nu$ ($\mu = 1, 2, \dots, \nu - 1$).

Для завершения доказательства осталось проверить, что конус Z_ν обладает неймановским состоянием равновесия. Покажем, что это состояние совпадает с $(\alpha_\nu, (x_\nu, y_\nu), p_\nu)$, где (x_ν, y_ν) — проекция процесса (\hat{x}, \hat{y}) на грань $\Gamma_\nu \times \Gamma_\nu$, p_ν — сужение функционала \hat{p} на грань Γ_ν . В самом деле, соотношения $\alpha_\nu x_\nu \leq y_\nu$ и $p_\nu(y_\nu) > 0$

очевидны. Неравенство же $p_\nu(y) \leq \alpha_\nu p_\nu(x)$ справедливо, поскольку $\hat{p}_i = 0$ ($i \in \bigcup_{\mu=1}^{\nu-1} I^\mu$).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Предположим, что модель Z , рассматриваемая нами, является моделью Неймана (т. е. Z — многогранный конус). В этом случае каждый конус Z_ν многогранен (и, в частности, замкнут); таким образом, при каждом $\nu = 1, 2, \dots, N$ выполняется одно из двух: либо Z_ν является моделью Неймана, либо Z_ν содержит элементы вида $(0, y)$, где $y \neq 0$. Напомним теперь, что, согласно теореме 6.1, каждая модель Неймана имеет неймановское состояние равновесия. Из сказанного следует, что в рассматриваемой ситуации теорема 6.2 принимает существенно более простой вид.

Т е о р е м а 6.2'. Пусть Z — модель Неймана. Число α является темпом роста этой модели в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:

- 1) существует такое ν , что α совпадает с неймановским темпом роста конуса Z_ν ,
- 2) при всех $\mu < \nu$ выполняется $\alpha_\mu > \alpha_\nu$.

5. Обобщенные темпы роста. Говорят, что число $\alpha > 0$, процесс $(x, \bar{y}) \in Z$ и функционал $\bar{p} \in (R_+^n)^*$ образуют обобщенное состояние равновесия σ модели Неймана — Гейла Z , если

$$\alpha \bar{x} \leq \bar{y}, \quad \bar{p} > 0, \\ \bar{p}(\bar{y}) \leq \alpha \bar{p}(x) \quad \text{для всех } (x, y) \in Z.$$

(Иными словами, σ удовлетворяет всем условиям, определяющим состояние равновесия, с той лишь разницей, что неравенство $\bar{p}(\bar{y}) > 0$ заменено на неравенство $\bar{p} > 0$.)

Число α , фигурирующее в этом определении, называется обобщенным темпом роста. Предложение 6.3 по существу показывает, что обобщенное равновесие существует в произвольной модели. Опишем все обобщенные темпы роста модели Неймана — Гейла Z .

П р е д л о ж е н и е 6.5. Пусть $\alpha' = \min_{\nu=1, \dots, N} \alpha_\nu$ (где α_ν — неймановские темпы моделей Z_ν , определенных в п. 4), α'' — неймановский темп роста модели Z . Число α является обобщенным темпом роста модели Z тогда и только тогда, когда $\alpha \in [\alpha', \alpha'']$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\alpha \in [\alpha', \alpha'']$. Обозначим через (\bar{x}, \bar{y}) неймановский процесс модели Z и

через \bar{p} функционал такой, что $\bar{p} \neq 0$, $\bar{p}(y) \leq \alpha' \bar{p}(x)$ ($(x, y) \in Z$) (в существовании этого функционала легко убедиться, применив предложение 6.3' к конусу $Z_{v'}$, где v' таково, что $\alpha' = \alpha_{v'}$).

Справедливо неравенство

$$\alpha \bar{x} \leq \bar{y}, \quad \bar{p}(y) \leq \alpha \bar{p}(x), \quad (x, y) \in Z,$$

т. е. α — обобщенный темп роста.

2) Пусть теперь $\alpha \notin [\alpha', \alpha'']$. Тогда если $\alpha > \alpha''$, то ни для какой пары $(x, y) \in Z$ не выполняется соотношение $y \geq \alpha x$; если же $\alpha < \alpha'$, то, используя лемму 6.1, можно указать такой процесс $(x_\alpha, y_\alpha) \in Z$, что $y_\alpha \gg \alpha x_\alpha$. Кроме того, для любого $p > 0$ выполняется неравенство $p(y_\alpha) > \alpha p(x_\alpha)$.

Предложение доказано.

Вопрос о существовании и числе состояний равновесия можно еще рассматривать со следующей точки зрения. Поскольку любой выпуклый конус Z можно сколь угодно точно «приблизить» многогранным, а для многогранного конуса, с одной стороны, выполнена теорема существования состояния равновесия, а с другой стороны, проекция на любое подпространство всегда многогранна, то вместо состояний равновесия исходного конуса Z можно рассматривать последовательности состояний равновесия приближающих Z многогранных конусов. Эти последовательности и принимаются, по определению, за состояние равновесия исходной модели. Известное преимущество такой точки зрения состоит в том, что теорема существования и теорема о числе и расположении состояний равновесия имеют место для произвольной модели. Отметим, что такой подход к экстремальным задачам последовательно проводится Гольштейном [1] и др., а применительно к модели Z — Мовшовичем [1].

6. Экономический темп роста. Рассмотрим модель Неймана — Гейла Z . Обозначим через a производственное отображение этой модели. Неймановский темп роста $\bar{\alpha}$ модели Z часто называют *технологическим темпом роста* этой модели. Наряду с технологическим рассматривают и *экономический темп роста* β . По определению,

$$\bar{\beta} = \min_{p \geq 0} \max_{(x, y) \in Z} \frac{p(y)}{p(x)}$$

(как обычно, считаем, что $\frac{p(y)}{p(x)} = \infty$, если $p(x) = 0$). Заметим, что $\beta < +\infty$. Пусть $p \in R_+^n$, $\gamma \geq \frac{p(y)}{p(x)}$ для всех $(x, y) \in Z$. Предположим, что $\gamma < \infty$. Тогда $p(y) \leq \gamma p(x)$ ($(x, y) \in Z$), т. е. $p \in \gamma a'(p)$ или, что то же самое, $\frac{1}{\gamma} p \in a'(p)$. Если $\gamma = \infty$, то формула $\frac{1}{\gamma} p \in a'(p)$ также верна. Из сказанного следует, что

$$\bar{\beta} = \min_{p \geq 0} \min \left\{ \gamma \mid \frac{1}{\gamma} p \in a'(p) \right\}.$$

Переходя к обратным величинам, запишем полученную формулу в виде

$$\frac{1}{\bar{\beta}} = \max_{p \geq 0} \max \{ \delta \mid \delta p \in a'(p) \}. \quad (6.22)$$

Из (6.22) вытекает, что число $1/\bar{\beta}$ совпадает с неймановским темпом роста α' отображения a' , двойственного к a . Рассуждая так же, как при доказательстве предложения 6.4, нетрудно убедиться в том, что число α является обобщенным темпом роста отображения a тогда и только тогда, когда $1/\alpha$ — обобщенный темп роста отображения a' . Поскольку, кроме того, α' — наибольший обобщенный темп роста отображения a' , то $\bar{\beta}$ — наименьший обобщенный темп роста отображения a . Из сказанного следует, что справедливо

Предложение 6.6. *Экономический темп роста модели Неймана — Гейла Z совпадает с технологическим темпом роста этой модели в том и только том случае, когда Z имеет единственный обобщенный темп роста.*

Привлекая предложение 6.5, получим, что $\bar{\beta} = \min_{\nu=1, \dots, N} \alpha_\nu$ (где α_ν — неймановские темпы роста моделей Z_ν , определенных в п. 4).

§ 7. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СУПЕРЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Собственные числа и собственные множества. Известная теорема Перрона — Фробениуса (см., например, Гантмахер [1]) утверждает, в частности, что всякий положительный оператор $A: R^n \rightarrow R^n$ обладает неотри-

цательным собственным числом; при этом A имеет лишь конечное число неотрицательных собственных чисел; если, кроме того, A неразложим, то у этого оператора существует единственное положительное собственное число λ и отвечающий этому числу собственный вектор является внутренней точкой конуса R_+^n .

Оказывается, что аналоги приведенных выше утверждений имеют место и для нормальных суперлинейных отображений. В этом смысле спектральная теория суперлинейных отображений может рассматриваться как обобщение спектральной теории положительных операторов.

Введем некоторые определения и обозначения. Всюду в этом параграфе, простоты ради, будем рассматривать лишь нормальные суперлинейные отображения R_+^n в $\Pi(R_+^n)$, хотя многие из приведенных результатов справедливы и в более общей ситуации. Совокупность всех таких отображений обозначим через A_n .

Через Π_n^c (соответственно, Π_n^b) обозначим совокупность всех нормальных (соответственно, непустых выпуклых) подмножеств конуса R_+^n . Неотрицательное число λ называется *собственным числом отображения* $a \in A_n$ на Π_n^c , если найдется выпуклый компакт ξ , отличный от нуля и такой, что

$$a(\xi) = \lambda\xi. \quad (7.1)$$

Множество ξ , удовлетворяющее соотношению (7.1), будем называть *собственным компактом отображения* a . Из нормальности a вытекает, что $\xi \in \Pi_n^c$.

Число $\lambda \geq 0$ называется *собственным числом отображения* $a \in A_n$ на Π_n^b , если найдется множество $\xi \in \Pi_n^b$, отличное от грани конуса R_+^n и такое, что $a(\xi) = \lambda\xi$. Это множество ξ будем называть *собственным множеством отображения* a .

Собственное число отображения a на Π_n^c является собственным числом этого отображения на Π_n^b . Это позволяет, в частности, называть собственный компакт собственным множеством.

2. Собственные числа отображения a на Π_n^c . Для того, чтобы доказать существование собственного компакта

у отображения $a \in A_n$, воспользуемся принципом неподвижной точки Шаудера, который формулируется следующим образом.

Принцип Шаудера. Оператор b , определенный на выпуклом компакте Ω в нормированном пространстве X , отображающий Ω в себя и непрерывный, имеет неподвижную точку (т. е. найдется элемент $x \in \Omega$, для которого $x = b(x)$).

Доказательство см. Канторович и Акилов [1].

Кроме того, нам понадобится

Предложение 7.1. Отображение $a \in A_n$ непрерывно.

Доказательство. В силу предложения 3.10 достаточно показать, что a полунепрерывно снизу. Пусть $x \in R_+^n$, $y \in a(x)$. Не умаляя общности, считаем, что $x \neq 0$ (в противном случае наше утверждение очевидно). Возьмем последовательность (x_k) элементов конуса R_+^n , стремящуюся к x , и положим

$$\mu_k = \max \{ \mu \mid \mu x \leq x_k \} = \min_{i \in I} \frac{x_k^i}{x^i}.$$

Так как $x_k \rightarrow x$, то $\mu_k \rightarrow 1$. Поскольку отображение a нормально, то оно возрастает, и потому $a(\mu_k x) = \mu_k a_i(x) \subset a(x_k)$. Положим $y_k = \mu_k y$. Из сказанного следует, что $y_k \in a(x_k)$ и $y_k \rightarrow y$. Тем самым полунепрерывность снизу отображения a , а с ней и непрерывность доказаны.

Теорема 7.1. Отображение $a \in A_n$ имеет собственный компакт.

Доказательство. Через P_n^c обозначим полулинейное пространство всех монотонных сублинейных функционалов, определенных на конусе $(R_+^n)^*$. (Иными словами, $P_n^c \equiv \mathcal{P}^m((R_+^n)^*)$.) В дальнейшем мы отождествляем функционал $p \in P_n^c$ с его следом на множестве $S_+^* = (R_+^n)^* \cap S^*$, где S^* — единичная сфера пространства $(R^n)^*$. (По поводу такого отождествления см. стр. 69.) Полулинейное пространство всех следов на S_+^* функционалов $p \in P_n^c$ обозначим тем же символом P_n^c , что и исходное пространство. Множество P_n^c можно рассматривать как выпуклый конус в пространстве $C(S_+^*)$ всех непрерывных функций, определенных на S_+^* . Нетрудно проверить, что конус P_n^c замкнут в $C(S_+^*)$. Из теоремы 2.6

следует, что отображение $\chi: U \rightarrow P_U$ (где $P_U: f \rightarrow \max_{x \in U} f(x)$) является алгебраическим и порядковым изоморфизмом полулинейного пространства Π_n^c и конуса P_n^c ; в силу предложения 3.9' отображение χ является изометрией. (Мы считаем, что в пространстве Π_n^c введена метрика Хаусдорфа.) Отметим еще, что отображение χ^{-1} сопоставляет функционалу $p \in P_n^c$ множество U_p^+ всех его положительных опорных.

Рассмотрим отображение a , фигурирующее в условии теоремы. Так как a суперлинейно и нормально, то $a(\xi) \in \Pi_n^c$ для любого компакта ξ (и, в частности, для $\xi \in \Pi_n^c$). Через \tilde{a} обозначим отображение конуса P_n^c в P_n^c , определенное формулой $\tilde{a} = \chi a \chi^{-1}$. Иными словами, для $\bar{p} \in P_n^c$

$$\tilde{a}(\bar{p}) = p_{a(U_{\bar{p}}^+)}$$

Так как χ является линейной изометрией, то для доказательства теоремы достаточно проверить, что оператор \tilde{a} имеет неотрицательное собственное число.

Пусть $f \in S_+^*$, $f \geq 0$. Положим

$$\Omega = \{p \in P_n^c \mid p(f) = 1\}.$$

Множество Ω выпукло и замкнуто. Покажем, что это множество ограничено. Так как $f \geq 0$, то найдется столь большое положительное число λ , что конусный отрезок $\langle 0, \lambda f \rangle = (\lambda f - (R_+^n)^*) \cap (R_+^n)^*$ содержит множество S_+^* . Для $p \in \Omega$ имеем (учитывая, что p — монотонный функционал)

$$\|p\| = \sup_{g \in S_+^*} p(g) \leq \sup_{g \in \langle 0, \lambda f \rangle} p(g) = p(\lambda f) = \lambda p(f) = \lambda,$$

откуда и следует ограниченность Ω .

Множество $\chi^{-1}(\Omega)$ ограничено в Π_n^c ; в силу теоремы Бляшке это множество компактно. Отсюда следует, что и множество $\Omega = \chi(\chi^{-1}(\Omega))$ компактно.

Для $p \in \Omega$ положим

$$b(p) = \frac{p + \tilde{a}(p)}{1 + \tilde{a}(p)(f)}. \quad (7.2)$$

Так как $b(p)(f) = 1$ ($p \in \Omega$), то оператор b , определенный формулой (7.2), переводит Ω в себя. Из предложения 7.1 следует, что оператор \tilde{a} непрерывен, а потому и b непрерывен. Применяя принцип неподвижной точки Шаудера, найдем неподвижную точку оператора b , т. е. элемент $\bar{p} \in \Omega$, для которого $b(\bar{p}) = \bar{p}$. Из определения b

следует, что $\bar{a}(\bar{p}) = \bar{a}(\bar{p})(f)\bar{p}$, т. е. \bar{p} является собственным вектором оператора \bar{a} , отвечающим собственному числу $\lambda = \bar{a}(\bar{p})(f) \geq 0$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. При доказательстве теоремы использовалась лишь непрерывность (по Хаусдорфу) отображения a .

Опишем теперь все собственные числа отображения a на Π_n^c . Для этого нам понадобится следующее

Предложение 7.2. Пусть a — вогнутое положительно однородное отображение конуса R_+^n в $\Pi(R_+^n)$, причем при любом $x \in R_+^n$ множество $a(x)$ содержит с каждой своей точкой y конусный отрезок $\langle 0, y \rangle$. Пусть, далее, число $\lambda > 0$ и ограниченное выпуклое множество ξ с непустой внутренностью таковы, что

$$\lambda\xi \subset a(\xi) \subset \lambda\xi. \quad (7.3)$$

Тогда число λ совпадает с неймановским темпом роста выпуклого конуса Z — графика отображения a .

Доказательство. 1) Напомним читателю, что неймановский темп роста $\bar{\alpha}$ определяется формулой

$$\bar{\alpha} = \sup_{x \in R_+^n \setminus \{0\}} \sup_{y \in a(x)} \sup \{\alpha \mid \alpha x \leq y\}.$$

Положим

$$\alpha(x) = \sup \{\alpha \mid \alpha x \in a(x)\}, \quad (7.4)$$

$$\tilde{\alpha} = \sup_{x \in R_+^n \setminus \{0\}} \alpha(x) \quad (7.5)$$

и покажем, что число $\tilde{\alpha}$, определенное формулой (7.5), совпадает с темпом $\bar{\alpha}$. Для этого достаточно проверить, что

$$\alpha(x) = \sup_{y \in a(x)} \sup \{\alpha \mid \alpha x \leq y\}. \quad (7.6)$$

При любом $\varepsilon > 0$

$$(\alpha(x) - \varepsilon)x \in a(x),$$

и потому $\alpha(x) \leq \sup_{y \in a(x)} \sup \{\alpha \mid \alpha x \leq y\}$. Пусть, с другой стороны, число $\beta \geq 0$ и элемент $y \in a(x)$ таковы, что $\beta x \leq y$. Тогда $\beta x \in \langle 0, y \rangle \subset a(x)$, и потому $\beta \leq \alpha(x)$. Тем самым (7.6) доказано.

Функция α , определенная формулой (7.4), положительно однородна нулевой степени. Из условия предложения следует, что ξ содержит конусный отрезок $\langle 0, x \rangle$, где $x \gg 0$, и потому $\sup_{x>0} \alpha(x) = \sup_{x \in \xi \setminus \{0\}} \alpha(x)$. Таким образом, для неймановского темпа $\bar{\alpha}$ имеет место равенство

$$\bar{\alpha} = \sup_{x \in \xi \setminus \{0\}} \alpha(x). \quad (7.7)$$

2) Для $x \in \xi$ положим

$$\mu(x) = \sup \{ \mu \mid \mu x \in \xi \}.$$

При любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение $(\mu(x) - \varepsilon)x \in \xi$. Так как $\alpha((\mu(x) - \varepsilon)x) = \alpha(x)$, то, используя (7.3), имеем при всех достаточно малых $\delta > 0$ (мы считаем, что $\alpha(x) > 0$)

$(\alpha(x) - \delta)(\mu(x) - \varepsilon)x \in a((\mu(x) - \varepsilon)x) \subset a(\xi) \subset \lambda \bar{\xi}$, откуда ввиду произвольности ε и δ следует $\alpha(x)\mu(x)x \in \lambda \bar{\xi}$. Заметим теперь, что $\max \{ \mu \mid \mu x \in \lambda \bar{\xi} \} = \lambda \mu(x)$.

Таким образом, $\alpha(x)\mu(x) \leq \lambda \mu(x)$ и потому $\alpha(x) \leq \lambda$. Привлекая теперь формулу (7.7), получим $\bar{\alpha} \leq \lambda$.

3) Докажем обратное неравенство. Из предложения 6.3' следует существование функционала $p > 0$, обладающего тем свойством, что $p \in \bar{\alpha} a'(p)$. Пусть $\sup_{x \in \xi} p(x) = c$.

Так как $\xi \cap \text{int } R_+^n \neq \emptyset$, то $c > 0$. Используя (7.3), имеем

$$\lambda c = \sup_{x \in \lambda \bar{\xi}} p(x) \leq \sup_{y \in a(\bar{\xi})} p(y) = \sup_{x \in \xi} \sup_{y \in a(x)} p(y) \leq \sup_{x \in \xi} \bar{\alpha} p(x) = \bar{\alpha} c,$$

откуда и вытекает неравенство $\lambda \leq \bar{\alpha}$.

Предложение доказано.

Т е о р е м а 7.2. 1) *Образование $a \in A_n$ имеет не более одного собственного числа λ , которому отвечает телесный собственный компакт; 2) если телесный собственный компакт ξ существует, то λ совпадает с неймановским темпом роста $\bar{\alpha}$ отображения a ; при этом 3) a не имеет обобщенных темпов роста, отличных от $\bar{\alpha}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первые два утверждения теоремы следуют непосредственно из предложения 7.2. Докажем справедливость третьего утверждения. Пусть α — обобщенный темп роста отображения a . Тогда найдется такой функционал $p > 0$, что $p \in \alpha a'(p)$. Рассуждая

так же, как и в части 3) доказательства предложения, убедимся в справедливости неравенства $\alpha \geq \lambda$. Так как $\lambda = \bar{\alpha}$, то $\alpha \geq \bar{\alpha}$, откуда (см. предложение 6.5) следует, что $\alpha = \bar{\alpha}$.

Теорема доказана.

Пусть ξ — собственный компакт отображения $a \in A_n$. Рассмотрим грань $\Gamma(\xi)$ конуса R_+^n , порожденную множеством ξ (напомним, что (см. предложение 2.15) $\Gamma(\xi) = \text{Co } \xi = \bigcup_{\mu \geq 0} \mu \xi$). Если λ — собственное число, которому отвечает ξ , то

$$a(\Gamma(\xi)) = a\left(\bigcup_{\mu \geq 0} \mu \xi\right) = \bigcup_{\mu \geq 0} a(\mu \xi) = \bigcup_{\mu \geq 0} \lambda \mu \xi.$$

Таким образом, если $\lambda = 0$, то $a(\Gamma(\xi)) = \{0\}$; если $\lambda > 0$, то $a(\Gamma(\xi)) = \Gamma(\xi)$. Отметим еще, что (см. предложение 2.12) ξ содержит внутреннюю точку грани $\Gamma(\xi)$, и поскольку ξ нормально, это множество телесно в пространстве $L(\xi) = \Gamma(\xi) - \Gamma(\xi)$. Каждую отличную от нуля грань конуса R_+^n можно отождествить с конусом R_+^l (где $l \leq n$). Из сделанных замечаний и теоремы 7.2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а 7.3. Пусть $\lambda > 0$ — собственное число отображения $a \in A_n$ на Π_n^c . Тогда найдется грань Γ конуса R_+^n такая, что $a(\Gamma) = \Gamma$ и λ совпадает с неймановским темпом роста конуса $Z_\Gamma = Z \cap (\Gamma \times \Gamma)$, где Z — график отображения a .

3. Собственные числа отображения a на Π_n^b . Из теоремы 7.1 следует, что каждое отображение $a \in A_n$ имеет собственное число на Π_n^b . Справедлива

Т е о р е м а 7.4. Если $a \in A_n$, то a имеет на Π_n^b лишь конечное множество собственных чисел.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы опирается на следующую простую лемму.

Л е м м а 7.1. Пусть телесное выпуклое множество ξ из Π_n^b обладает тем свойством, что с каждой своей точкой x оно содержит конусный отрезок $\langle 0, x \rangle$. Тогда 1) существует наибольшая (по включению) грань Γ конуса R_+^n , содержащаяся в ξ , 2) множество $\eta = \text{Pr}_{\Gamma'} \xi$ (где Γ' — грань, дизъюнктная к Γ) ограничено и телесно в Γ' , 3) имеют место включения $\xi \subset \Gamma + \eta \subset \bar{\xi}$.

Доказательство леммы. 1) Докажем вначале первое утверждение леммы. Если множество ξ ограничено, то наибольшая грань Γ конуса R_+^n , содержащаяся в ξ , существует и равна $\{0\}$. Предположим теперь, что ξ неограничено. Тогда, в силу леммы 4.1, множество $\bar{\xi}$ содержит луч $(\mu x)_{\mu \geq 0}$.

Пусть

$$x = \sum_{i \in I_0} x^i e_i, \text{ где } I_0 = \{i \in I \mid x^i > 0\},$$

через e_i обозначен i -й орт пространства R^n . Нетрудно проверить, что множество $\bar{\xi}$ с каждой своей точкой y содержит конусный отрезок $\langle 0, y \rangle$. Из сказанного следует, что лучи $(\mu e_i)_{\mu \geq 0}$ ($i \in I_0$) входят в $\bar{\xi}$. Пусть $i \in I_0$, $\mu \geq 0$ и последовательность (x_n) элементов множества ξ такова, что $x_n \rightarrow (\mu + 1)e_i$. При достаточно больших n выполняется неравенство $x_n^i e_i \geq \mu e_i$, кроме того, $x_n \geq x_n^i e_i$. Таким образом, $\mu e_i \in \langle 0, x_n \rangle$ и, стало быть, $\mu e_i \in \xi$. Итак, ξ содержит луч $(\mu e_i)_{\mu \geq 0}$. Обозначим через \hat{I} множество всех индексов i , для которых $(\mu e_i)_{\mu \geq 0} \subset \xi$. Множество

$$\Gamma = \text{co} \left(\bigcup_{i \in \hat{I}} (\mu e_i)_{\mu \geq 0} \right) = \{x \in R_+^n \mid x = \sum_{i \in \hat{I}} \mu_i e_i\}$$

и является наибольшей по включению гранью конуса R_+^n , содержащейся в ξ .

2) Из рассуждений п. 1) доказательства немедленно вытекает, что множество $\eta = \text{Pr}_{\Gamma} \bar{\xi}$ ограничено. Телесность этого множества следует из телесности $\bar{\xi}$.

3) Докажем теперь третье утверждение леммы. Включение $\xi \subset \Gamma + \eta$ очевидно. Покажем, что $\Gamma + \eta \subset \bar{\xi}$. Отметим прежде всего, что, как следует из свойств множества ξ , справедливо соотношение $\eta \subset \xi$. Поскольку, кроме того, $\Gamma \subset \xi$ и ξ выпукло, то при любом $\alpha \in (0, 1)$ имеем $\alpha \eta + (1 - \alpha)\Gamma = \alpha \eta + \Gamma \subset \xi$.

Пусть $x \in \Gamma + \eta$, $x = u + v$, где $u \in \Gamma$, $v \in \eta$. Так как при всех натуральных n

$$u + \frac{n-1}{n} v \in \Gamma + \frac{n-1}{n} \eta \subset \xi,$$

то $\lim \left(u + \frac{n-1}{n} v \right) = x \in \bar{\xi}$, чем и доказано третье утверждение леммы.

Доказательство теоремы 7.4. Пусть $a(\xi) = \lambda\xi$ ($\lambda > 0$). Так как отображение a нормально, то ξ с каждой своей точкой x содержит конусный отрезок $\langle 0, x \rangle$. Нетрудно проверить, что множество $L = \bigcup_{\mu \geq 0} \mu\xi$ является гранью конуса R_+^n . Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что ξ телесно (в противном случае следует вместо a рассмотреть сужение a_L отображения a на грань L).

Пусть Γ — наибольшая (по включению) грань конуса R_+^n , содержащаяся в ξ , Γ' — дизъюнктное дополнение к Γ . Рассмотрим отображение b конуса Γ' в $\Pi(\Gamma')$, график которого совпадает с проекцией конуса Z — графика отображения a — на грань $\Gamma' \times \Gamma'$ конуса $R_+^n \times R_+^n$. Нетрудно проверить, что

$$b(\omega) = \text{Pr}_{\Gamma'} a(\omega + \Gamma) \quad (\omega \subset \Gamma').$$

Так как проекция выпуклого конуса является выпуклым конусом, то (см. предложение 4.4) отображение b вогнуто и положительно однородно. Положим $\eta = \text{Pr}_{\Gamma'} \xi$ и покажем, что

$$\lambda\eta \subset b(\eta) \subset \lambda\bar{\eta}. \quad (7.8)$$

В самом деле, в силу леммы 7.1, $\xi \subset \eta + \Gamma \subset \bar{\xi}$, и потому $\lambda\xi = a(\xi) \subset a(\eta + \Gamma) \subset a(\bar{\xi})$, откуда следуют соотношения

$$\lambda\eta \subset b(\eta) \subset \text{Pr}_{\Gamma'} a(\bar{\xi}).$$

Нам осталось проверить включение $\text{Pr}_{\Gamma'} a(\bar{\xi}) \subset \lambda\bar{\eta}$. Покажем вначале, что $a(\bar{\xi}) \subset \lambda\bar{\xi}$. В самом деле, пусть $y \in a(\bar{\xi})$ и элемент $x \in \bar{\xi}$ таков, что $y \in a(x)$. Выберем последовательность (x_n) элементов множества ξ , стремящуюся к x , и, используя полунепрерывность снизу отображения a , найдем последовательность (y_n) , для которой выполняются соотношения

$$y_n \rightarrow y, \quad y_n \in a(x_n) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поскольку $x_n \in \xi$, то $y_n \in a(\xi) = \lambda\xi$, и потому $y \in \lambda\bar{\xi}$,

откуда и следует нужное нам включение. Используя теперь соотношение $\text{Pr}_\Gamma \bar{\xi} \subset \overline{\text{Pr}_\Gamma \xi} = \bar{\eta}$ (которое легко следует из ограниченности η), получим

$$\text{Pr}_\Gamma a(\bar{\xi}) \subset \text{Pr}_\Gamma (\lambda \bar{\xi}) = \lambda \text{Pr}_\Gamma \bar{\xi} \subset \lambda \bar{\eta}.$$

Тем самым формула (7.8) доказана. Из этой формулы вытекает, что отображение b , множество η и число λ удовлетворяют всем условиям предложения 7.2. Применяя это предложение, убедимся в том, что λ — единственное собственное число, которому отвечает телесное собственное множество, содержащее Γ в качестве наибольшей грани. Справедливость теоремы следует теперь из многогранности конуса R_+ .

4. Собственные множества, отвечающие темпам роста. Пусть α есть темп роста отображения $a \in A_n$ и $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \alpha \bar{x}), \bar{p})$ — состояние равновесия модели Z , определяемой отображением a . Положим

$$\eta_\sigma^\vee = \{y \in R_+^n \mid \bar{p}(y) \leq \bar{p}(x)\}.$$

Через Π_σ^\vee обозначим совокупность всех выпуклых подмножеств множества η_σ^\vee , содержащих точку \bar{x} . Упорядочим Π_σ^\vee по включению. Это множество является полной структурой (инфимум любого семейства элементов Π_σ^\vee совпадает с пересечением элементов этого семейства, супремум — с выпуклой оболочкой объединения этих элементов).

Предложение 7.3. Если $\eta \in \Pi_\sigma^\vee$, то $\frac{1}{\alpha} a(\eta) \in \Pi_\sigma^\vee$.

Доказательство. Покажем вначале, что $\frac{1}{\alpha} a(\eta) \subset \eta_\sigma^\vee$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \frac{1}{\alpha} a(\eta)} \bar{p}(z) &= \frac{1}{\alpha} \sup_{z \in a(\eta)} \bar{p}(z) = \frac{1}{\alpha} \sup_{x \in \eta} \sup_{y \in a(x)} \bar{p}(y) \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \sup_{x \in \eta} \alpha \bar{p}(x) = \sup_{x \in \eta} \bar{p}(x) = \bar{p}(\bar{x}), \end{aligned}$$

откуда и следует наше утверждение. Кроме того,

$$x \in \frac{1}{\alpha} a(x) \subset \frac{1}{\alpha} a(\eta).$$

Таким образом, $\eta \in \Pi_\sigma^\vee$.

Предложение доказано.

Из предложения 7.3 сразу вытекает, что α является собственным числом отображения a на Π_n^b . Точнее говоря, имеет место

Т е о р е м а 7.5. *Темп роста α отображения a является собственным числом этого отображения на Π_n^b . Если $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), \bar{p})$ — состояние равновесия с темпом роста α , то в структуре Π_σ^V существует наименьшее собственное множество ξ отображения a , соответствующее темпу α . При этом*

$$\xi = \bigcup_{t=1}^{\infty} \alpha^{-t} a^t (\bar{x}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\eta' \subset \eta \subset R_+^n$, то при любом натуральном t

$$(\alpha^{-1}a)^t (\eta') \subset (\alpha^{-1}a)^t \eta.$$

В частности, из включения $\bar{x} \in \alpha^{-1}a(\bar{x})$ следует, что

$$\alpha^{-t} a^t (\bar{x}) = (\alpha^{-1}a)^t (\bar{x}) \subset (\alpha^{-1}a)^{t+1} (\bar{x}) = \alpha^{-(t+1)} a^{t+1} (\bar{x}).$$

Таким образом,

$$\alpha^{-1}a(\bar{x}) \subset \alpha^{-2}a^2(\bar{x}) \subset \dots \subset \alpha^{-t}a^t(\bar{x}) \subset \dots$$

Поскольку, кроме того, каждое из множеств $\alpha^{-t}a^t(\bar{x})$ выпукло, то и их объединение ξ также выпукло. Имеем

$$a(\xi) = a\left(\bigcup_{t=1}^{\infty} \alpha^{-t} a^t (\bar{x})\right) = \bigcup_{t=1}^{\infty} \alpha^{-t} a^{t+1} (\bar{x}) = \alpha \bigcup_{t=1}^{\infty} \alpha^{-(t+1)} a^{t+1} (\bar{x}) = \alpha \xi.$$

Так как $\bar{p}(\bar{x}) > 0$, то ξ не совпадает с гранью конуса R_+^n .

Таким образом, α — собственное число отображения a на Π_n^b , которому отвечает собственное множество ξ . Из предложения 7.3 и того обстоятельства, что Π_σ^V — полная структура, вытекает включение $\xi \in \Pi_\sigma^V$. Покажем, что ξ — наименьшее в Π_σ^V собственное множество. В самом деле, пусть $\xi' \in \Pi_\sigma^V$, $a(\xi') = \alpha \xi'$. Так как $\bar{x} \in \xi'$, то при любом t

$$\alpha^{-t} a^t (\bar{x}) \subset \alpha^{-t} a^t (\xi') = (\alpha^{-1}a)^t (\xi') = \xi',$$

и потому $\xi = \bigcup_{t=1}^{\infty} \alpha^{-t} a^t (\bar{x}) \subset \xi'$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Не всякое собственное число является темпом роста отображения. Приведем соответствующий пример.

П р и м е р. Рассмотрим конус Z , лежащий в $R_+^2 \times R_+^2$ и натянутый на образующие $((1, 0); (1, 0))$, $((0, 1); (0, 1))$, $((1, 1); (1, 2))$, $((1, 0); (0, 0))$, $((0, 1); (0, 0))$. Отображение a , графиком которого является Z , входит в A_2 . Единственным темпом роста отображения a является его неймановский темп роста $\bar{\alpha} = 1$. В то же время это отображение имеет собственное число $\lambda = 2$. Соответствующее этому числу собственное множество ξ совпадает с полуполосой $\{x \in R_+^2 \mid x^2 \leq 1\}$.

Этот пример показывает, в частности, что собственные числа отображения $a \in A_n$ на Π_n^b могут превышать неймановский темп роста.

Особый интерес представляет случай, когда $\bar{p} \gg 0$. В этом случае имеет место

П р е д л о ж е н и е 7.4. Пусть состояние равновесия $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), \bar{p})$ таково, что $\bar{p} \gg 0$. Тогда 1) α является собственным числом отображения a на Π_n^c . При этом 2) наименьший в структуре Π_σ^v собственный компакт ξ_1 отображения a определяется формулой $\xi_1 = \bigcup_t \alpha^{-t} a^t(\bar{x})$; 3) наибольший в Π_σ^v собственный компакт ξ_2 существует и имеет вид

$$\xi_2 = \bigcap_t \alpha^{-t} a^t(\eta_\sigma^v)$$

(где, как и выше, $\eta_\sigma^v = \{y \in R_+^n \mid \bar{p}(y) \leq \bar{p}(\bar{x})\}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\bar{p} \gg 0$, то множество η_σ^v компактно. Отсюда следует, что множество $\xi = \bigcup_t \alpha^{-t} a^t(\bar{x})$ ограничено и, стало быть, $\xi_1 = \bar{\xi}$ является компактом. В силу теоремы 7.5 $a(\xi) = \alpha\xi$. Покажем, что и $a(\bar{\xi}) = \alpha\bar{\xi}$. Из включения $\bar{\xi} \supset \xi$ вытекает соотношение $a(\bar{\xi}) \supset a(\xi) = \alpha\xi$.

Поскольку $a(\bar{\xi})$ — компакт, то $a(\bar{\xi}) \supset \alpha\bar{\xi}$. Пусть теперь $y \in a(\bar{\xi})$ и элемент $x \in \bar{\xi}$ таков, что $y \in a(x)$. Выберем последовательность (x_n) элементов множества $\bar{\xi}$, стремящуюся к x , и, используя полунепрерывность снизу отображения a , найдем последовательность (y_n) , обладающую тем свойством, что $y_n \rightarrow y$, $y_n \in a(x_n)$. Так как $x_n \in \bar{\xi}$, то $y_n \in a(\bar{\xi}) = \alpha\bar{\xi}$ и, стало быть, $y \in \alpha\bar{\xi}$. Таким

образом, включение $a(\bar{\xi}) \subset \alpha\bar{\xi}$, а с ним и равенство $a(\bar{\xi}) = \alpha\bar{\xi}$ доказаны. Из сказанного следует, что α — собственное число отображения a на Π_n^c . Кроме того, в силу теоремы 7.5, $\xi_1 = \bar{\xi}$ — наименьший собственный компакт (в структуре Π_σ^V) этого отображения.

Докажем третью часть предложения. Положим $\eta_t = \alpha^{-t}a^t(\eta_\sigma^V)$. Множество η_t является выпуклым компактом. В силу предложения 7.3 $\alpha^{-1}a(\eta_\sigma^V) \subset \eta_\sigma^V$, и потому $\alpha^{-(t+1)}a^{t+1}(\eta_\sigma^V) = \eta_{t+1} \subset \eta_t = \alpha^{-t}a^t(\eta_\sigma^V)$. Отметим еще, что $\eta_{t+1} = \alpha^{-1}a(\eta_t)$. Рассмотрим множество ξ_2 , фигурирующее в условии предложения. Так как $\xi_2 = \bigcap_t \eta_t$, то (см. предложение 3.8) $\xi_2 = \lim \eta_t$ (где предел понимается в смысле метрики Хаусдорфа). Учитывая, что a — непрерывное отображение, имеем

$$a(\xi_2) = \lim a(\eta_t) = \alpha \lim \eta_{t+1} = \alpha\xi_2.$$

Таким образом, ξ_2 — собственный компакт отображения a . Пусть ξ — другой собственный компакт этого отображения, $\xi \in \Pi_\sigma^V$. Тогда $\xi \subset \eta_\sigma^V$ и, стало быть,

$$\alpha^{-t}a^t(\xi) = \xi \subset \alpha^{-t}a^t(\eta_\sigma^V),$$

откуда следует, что $\xi \subset \bigcap_t \alpha^{-t}a^t(\eta_\sigma^V) = \xi_2$.

Предложение доказано.

5. Собственные числа отображения a^{-1} . Пусть $a \in A_n$ и a^{-1} — обратное к a отображение. Неотрицательное число λ назовем *собственным числом отображения a^{-1}* , если найдется выпуклое множество ξ ($0 \notin \xi$), при котором $a^{-1}(\xi) = \lambda\xi$. При этом ξ называется *собственным множеством*.

Покажем, что число α^{-1} , где α — темп роста отображения a , является собственным числом отображения a^{-1} . (При этом мы будем использовать те же соображения, что и в предыдущем пункте, но «с точностью до наоборот»).

Пусть $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), \bar{p})$ — состояние равновесия модели, определяемой отображением a . Положим

$$\eta_\sigma^\wedge = \{y \in R_+^n \mid \bar{p}(y) \geq \bar{p}(\bar{x})\}.$$

Через Π_σ^\wedge обозначим совокупность всех выпуклых мно-

жеств η таких, что $\bar{x} \in \eta \subset \eta_\sigma^\wedge$. Множество Π_σ^\wedge , упорядоченное по включению, является полной структурой.

Предложение 7.5. Если $\eta \in \Pi_\sigma^\wedge$, то $\alpha\alpha^{-1}(\eta) \in \Pi_\sigma^\wedge$.

Доказательство. Пусть $\eta \in \Pi_\sigma^\wedge$. Тогда

$$\begin{aligned} \inf_{z \in \alpha\alpha^{-1}(\eta)} \bar{p}(z) &= \alpha \inf_{z \in \alpha^{-1}(\eta)} \bar{p}(z) = \alpha \inf_{y \in \eta} \inf_{x \in \alpha^{-1}(y)} \bar{p}(x) \geq \\ &\geq \alpha \inf_{y \in \eta} \frac{1}{\alpha} \bar{p}(y) = \inf_{y \in \eta} \bar{p}(y) = \bar{p}(\bar{x}). \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha\alpha^{-1}(\eta) \subset \eta_\sigma^\wedge$. Кроме того,

$$x \in \alpha\alpha^{-1}(\bar{x}) \subset \alpha\alpha^{-1}(\eta).$$

Мы показали, что $\eta \in \Pi_\sigma^\wedge$.

Предложение доказано.

Теорема 7.6. Пусть α — темп роста отображения a . Тогда α^{-1} является собственным числом отображения a^{-1} . Если $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), \bar{p})$ — состояние равновесия с темпом роста α , то в Π_σ^\wedge существует наименьшее собственное множество ξ этого отображения. При этом

$$\xi = \bigcup_{t=1}^{\infty} \alpha^t a^{-t}(\bar{x}).$$

Доказательство может быть проведено с помощью тех же рассуждений, что и доказательство теоремы 7.5.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ И ИХ
ХАРАКТЕРИСТИКИ

Начиная с этой главы, изучаются траектории движения экономической системы во времени. Траектория представляет собой элемент декартова произведения фазовых пространств системы для соответствующих моментов времени.

Определяется весьма общим способом множество допустимых или технологически возможных траекторий движения экономики. В частности, вводится в рассмотрение множество допустимых траекторий, выходящих из заданного начального состояния. На этом множестве выделяются экстремальные (оптимальные) в том или ином смысле траектории.

Определяется также модель, двойственная к данной, и рассматриваются траектории в этой двойственной модели.

Главный результат настоящей главы состоит в доказательстве так называемых *теорем о характеристике оптимальных траекторий*. Эти теоремы дают необходимые и достаточные условия оптимальности траекторий в терминах соотношений с траекториями двойственной модели. Теоремы о характеристике оптимальных траекторий имеют тот же смысл и то же значение в данной теории, что и теорема Куна — Таккера в выпуклом программировании или принцип максимума в задачах оптимального управления.

В частности, интересно отметить, что в тех случаях, когда задача нахождения оптимальной траектории на множестве допустимых траекторий может быть сформулирована как задача выпуклого программирования, или соответственно оптимального управления, теорема о характеристике превращается в теорему Куна — Таккера, соответственно, в принцип максимума.

§ 8. ОБЩАЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

1. Введение. Модель Неймана — Гейла, рассмотренная в предыдущей главе, описывает стационарную (не меняющуюся во времени) экономику. Существенно более общую ситуацию (нестационарную экономику) описывает модель типа Неймана — Гейла, которая определяется последовательностями $(X_t)_{t=0}^{\infty}$, $(K_t)_{t=0}^{\infty}$, $(Z_t)_{t=0}^{\infty}$, где X_t совпадает с арифметическим пространством R^{n_t} размерности n_t , $K_t = R_+^{n_t}$, Z_t — выпуклый, замкнутый конус, лежащий в $R_+^{n_t} \times R_+^{n_{t+1}}$ и такой, что $(0, y) \notin Z_t$ при $y \neq 0$, $\text{Pr}_2 Z_t \cap \text{int } K_{t+1} \neq \emptyset$.

Модель типа Неймана — Гейла, так же как и модель Неймана — Гейла, описывает экономику, функционирующую в дискретном времени. Представляет интерес рассмотреть и непрерывные модели экономической динамики.

Изучение некоторых свойств траекторий указанных выше моделей можно провести с единой точки зрения. С этой целью мы рассмотрим общую технологическую модель экономической динамики, содержащую модели, о которых речь шла выше, как частные случаи. В §§ 8, 9 изучаются траектории общей модели; в § 10 полученные для общей модели результаты конкретизируются по отношению к моделям Неймана — Гейла, типа Неймана — Гейла и непрерывной экономики.

2. Определение модели. Траектории. Для того чтобы задать *общую технологическую модель экономической динамики* \mathfrak{M} , надо указать.

а) Множество неотрицательных вещественных чисел E , которое обладает лишь следующими двумя свойствами: 1) $0 \in E$; 2) E содержит более одного элемента. В дальнейшем будем называть элементы E *индексами* или *моментами времени*. Положим $\bar{E} = \{(\tau, t) \in E \times E \mid \tau > t\}$.

б) Семейство конечномерных векторных пространств $(X_t)_{t \in E}$.

в) Семейство конусов $(K_t)_{t \in E}$; здесь K_t — выпуклый замкнутый выступающий телесный конус *) в пространстве X_t .

*) В дальнейшем может встретиться случай, когда пространство X_t нульмерно, т. е. $X_t = \{0\}$. В этом случае $K_t = \{0\}$. Считаем, что этот конус, по определению, телесен.

г) Семейство отображений $(a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}$. Здесь $a_{\tau, t}$ ($(\tau, t) \in \tilde{E}$) — суперлинейное отображение; точнее говоря, $a_{\tau, t} \in A(K_t, K_\tau)$; считаем, что семейство $(a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}$ удовлетворяет следующему условию согласования: если $t, t', t'' \in E$, $t < t' < t''$, то

$$a_{t'', t'} \circ a_{t', t} = a_{t'', t}, \quad (8.1)$$

Отображения $a_{\tau, t}$ в дальнейшем будем называть *производственными отображениями* модели.

Итак, по определению,

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\}.$$

В дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, общую технологическую модель экономической динамики \mathfrak{M} мы будем называть технологической моделью; если из контекста ясно, о каких пространствах и конусах идет речь, то будем писать

$$\mathfrak{M} = \{E, (a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\}.$$

Приведем простейшую экономическую интерпретацию модели \mathfrak{M} .

Элементы множества E будем интерпретировать как моменты времени. Элементы конуса K_τ можно рассматривать как ресурсы экономики в момент τ ; элементы конуса $a_{\tau, t}(K_t)$ — как совокупность всех выпусков «продуктов», которые могут быть произведены в момент τ при затратах в момент t . Отображения $a_{\tau, t}$ служат для непосредственного описания функционирования экономики; точнее говоря, вектор y ($y \in K_\tau$) является элементом множества $a_{\tau, t}(x)$ ($x \in K_t$) тогда и только тогда, когда при затратах x в момент t возможен выпуск y в момент τ .

Условие согласования (8.1) означает, что для любого $x \in K_t$

$$a_{t'', t}(x) = \bigcup_{y \in a_{t', t}(x)} a_{t'', t'}(y) \\ (t, t', t'' \in E, \quad t < t' < t'').$$

Иными словами, 1) если вектор z может быть получен в момент t'' при затратах x в момент t , то в любой момент $t' \in E$ ($t < t' < t''$) найдется вектор y , который может

быть получен при затратах x (за период времени от t до t') и из которого можно произвести z (за период времени от t' до t''); 2) если затрачивая в момент t вектор x , мы производим в момент t' вектор y , а из y в свою очередь можно получить z (в момент t''), то z может быть непосредственно произведен при затратах x за период времени от t до t'' .

Основным объектом изучения в технологических моделях является траектория. *Траекторией* технологической модели \mathfrak{M} назовем семейство $\chi = (x_t)_{t \in E}$ такое, что

$$\text{а) } x_t \in K_t \quad (t \in E),$$

$$\text{б) } x_\tau \in a_{\tau, t}(x_t) \quad ((\tau, t) \in \tilde{E}).$$

Если $\chi = (x_t)_{t \in E}$ — траектория модели \mathfrak{M} , то элемент x_t ($t \in E$) назовем *состоянием траектории* χ (в момент t); в частности, элемент x_0 называется *начальным состоянием* этой траектории. Будем также говорить, что траектория χ *исходит* из точки x , если ее начальное состояние совпадает с x , траектория *проходит* через точку x в момент t , если x совпадает с состоянием этой траектории в момент t .

Заметим, что траекторию χ модели \mathfrak{M} можно рассматривать, как элемент прямого произведения $\prod_{t \in E} X_t$.

Совокупность всех траекторий технологической модели \mathfrak{M} назовем *пучком траекторий* этой модели и обозначим символом $P_{\mathfrak{M}}$. Следующая теорема показывает, что пучок траекторий $P_{\mathfrak{M}}$ непуст.

Т е о р е м а 8.1. Пусть $y_0 \in K_0$ и $y' \in a_{t', 0}(y_0)$ ($t' \in E$, $t' > 0$). Тогда найдется траектория χ модели \mathfrak{M} , исходящая из y_0 и проходящая в момент t' через y' .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам будет удобно присоединить к конусу K_t какую-нибудь точку u_t из X_t , в K_t не входящую. Положим $L_t = K_t \cup \{u_t\}$ ($t \in E$) и через L обозначим прямое произведение $\prod_{t \in E} L_t$ множеств L_t .

Выберем теперь в L подмножество M , состоящее из элементов $\chi = (x_t)_{t \in E}$, которые обладают следующим свойством: найдется подмножество E_χ множества E такое, что 1) $0 \in E_\chi$, $t' \in E_\chi$ 2) если $t, \tau \in E_\chi$, $\tau > t$, то $x_\tau \in a_{\tau, t}(x_t)$, 3) $x_0 = y_0$, $x_{t'} = y'$, 4) если $t \in E \setminus E_\chi$, то $x_t = u_t$.

Множество M непусто (оно содержит, например, элемент $\chi = (x_t)_{t \in E}$, где $x_0 = y_0$, $x_{t'} = y'$, $x_t = u_t$ ($t \in E$, $t \neq 0, t'$); в этом случае $E_\chi = \{0, t'\}$).

Введем в M отношение порядка \succcurlyeq , положив $\chi_1 \succcurlyeq \chi_2$ ($\chi_1 = (x_t^1)_{t \in E} \in M$, $\chi_2 = (x_t^2)_{t \in E} \in M$), тогда и только тогда, когда а) $E_{\chi_1} \supset E_{\chi_2}$, б) $x_t^1 = x_t^2$ ($t \in E_{\chi_2}$).

Покажем, что упорядоченное множество M индуктивно (т. е. каждая цепь в M ограничена сверху). Пусть $(\chi_\alpha)_{\alpha \in A}$ — цепь *) в M , $\chi_\alpha = (x_t^\alpha)_{t \in E}$ ($\alpha \in A$). Определим элемент $\chi = (x_t)_{t \in E}$ множества L соотношениями:

$$x_t := x_t^\alpha, \text{ если } t \in E_{\chi_\alpha}, \quad x_t = u_t, \text{ если } t \notin \bigcup_{\alpha \in A} E_{\chi_\alpha}.$$

Так как $(\chi_\alpha)_{\alpha \in A}$ — цепь, то приведенное определение корректно. Непосредственно из этого определения вытекает, что $\chi \in M$ (причем $E_\chi = \bigcup_{\alpha \in A} E_{\chi_\alpha}$). При любом $\alpha \in A$

$$\chi \succcurlyeq \chi_\alpha,$$

откуда и вытекает, что цепь $(\chi_\alpha)_{\alpha \in A}$ ограничена.

Из леммы Цорна (см., например, Райков [1]) теперь следует, что множество M имеет максимальные элементы.

Для завершения доказательства осталось проверить, что каждый максимальный элемент $\chi = (x_t)_{t \in E}$ множества M обладает тем свойством, что $E_\chi = E$. Предполагая противное, найдем точку θ , принадлежащую $E \setminus E_\chi$, и положим $F_1 = \{t \in E_\chi \mid t < \theta\}$, $F_2 = \{\tau \in E_\chi \mid \tau > \theta\}$. Множество F_1 непусто ($0 \in F_1$). Будем считать, что F_2 также непусто (в противном случае доказательство лишь облегчится). Символом F обозначим прямое произведение $F_2 \times F_1$. Для пары $(\tau, t) \in F$ положим

$$b_{\tau, t} = a_{\tau, \theta}^{-1}(x_\tau) \cap a_{\theta, t}(x_t).$$

Отметим некоторые простые свойства множества $b_{\tau, t}$.

1) $b_{\tau, t}$ непусто ($(\tau, t) \in F$). В самом деле, поскольку $t < \theta < \tau$ и $x_\tau \in a_{\tau, t}(x_t) = a_{\tau, \theta} \circ a_{\theta, t}(x_t)$, то найдется элемент y конуса K_θ такой, что

$$y \in a_{\theta, t}(x_t), \quad x_\tau \in a_{\tau, \theta}(y).$$

*) Подмножество N упорядоченного множества M называется цепью, если любые два его элемента сравнимы (если $x, y \in N$, то либо $x \succcurlyeq y$, либо $x \preccurlyeq y$).

Из написанных соотношений следует, что $y \in b_{\tau,t}$, т. е. $b_{\tau,t} \neq \phi$.

2) $b_{\tau,t}$ компактно ($(\tau, t) \in F$). Действительно, поскольку отображение $a_{0,t}$ суперлинейно, то множество $a_{0,t}(x_t)$ компактно; так как, кроме того, множество $a_{\tau,0}^{-1}(x_\tau)$ замкнуто, то $b_{\tau,t}$ компактно.

3) Если $(\tau, t_1) \in F$, $(\tau, t_2) \in F$ и $t_1 > t_2$, то $b_{\tau,t_1} \subset b_{\tau,t_2}$.

Действительно, поскольку $t_2 < t_1 < \theta$, то

$$a_{0,t_2}(x_{t_2}) = a_{0,t_1} \circ a_{t_1,t_2}(x_{t_2}),$$

и, следовательно, $a_{0,t_2}(x_{t_2}) \supset a_{0,t_1}(x_{t_1})$, откуда и следует нужное нам включение. Таким же образом проверяется свойство

4) Если $(\tau_1, t) \in F$, $(\tau_2, t) \in F$ и $\tau_1 > \tau_2$, то $b_{\tau_1,t} \supset b_{\tau_2,t}$.

Из свойств 1), 3) и 4) следует, в частности, что семейство $(b_{\tau,t})_{(\tau,t) \in F}$ центрировано*). Действительно, пусть $(\tau_i, t_i) \in F$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Положим

$$\tau = \min_i \tau_i, \quad t = \max_i t_i.$$

Очевидно, $(\tau, t) \in F$. При этом $b_{\tau,t} \subset b_{\tau,t_i} \subset b_{\tau_i,t_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е. $b_{\tau,t} \subset \bigcap_{i=1}^n b_{\tau_i,t_i}$. Поскольку $b_{\tau,t}$ непусто, то и пересечение $\bigcap_{i=1}^n b_{\tau_i,t_i}$ непусто.

Из компактности множеств $b_{\tau,t}$ и центрированности семейства $(b_{\tau,t})_{(\tau,t) \in F}$ вытекает, что $\bigcap_{(\tau,t) \in F} b_{\tau,t} \neq \phi$. Пусть $y_0 \in \bigcap_{(\tau,t) \in F} b_{\tau,t}$. Рассмотрим элемент $\bar{x} = (x_t)_{t \in E}$ множества M , определенный следующим образом:

$$\bar{x}_t = \begin{cases} x_t, & t \in E_x, \\ y_0, & t = \theta, \\ u_t, & t \in E \setminus (E_x \cup \{\theta\}). \end{cases}$$

*) Семейство множеств называется центрированным, если каждое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение. Отметим, что пересечение центрированного семейства компактных множеств непусто.

Элемент $\chi \in M$, причем $E_{\bar{\chi}} = E_{\chi} \cup \{\theta\}$. Кроме того, $\bar{\chi} \succ \chi$, $\bar{\chi} \neq \chi$. Последнее, однако, невозможно, так как χ — максимальный элемент множества M . Полученное противоречие и доказывает теорему.

Приведем некоторые следствия из теоремы 8.1.

С л е д с т в и е 1. Из каждой точки x конуса K_0 исходит траектория модели \mathfrak{M} .

С л е д с т в и е 2. Если $x \in a_{t,0}(K_0)$ ($t \in E$), то найдется траектория χ модели \mathfrak{M} , состояние которой в момент t совпадает с x .

С л е д с т в и е 3. Пусть $(t_1, t_2) \in E$ ($t_2 > 0$) и элементы x_1, x_2 таковы, что $x_2 \in a_{t_2,0}(K_0)$, $x_1 \in a_{t_1,t_2}(x_2)$. Тогда существует траектория модели \mathfrak{M} , проходящая в момент t_i через точку x_i ($i = 1, 2$).

Чтобы показать справедливость этого следствия, рассмотрим технологические модели

$$\mathfrak{M}^- = \{E^-, (a_{\tau,t})_{(\tau,t) \in \tilde{E}^-}\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}^+ = \{E^+, (a_{\tau,t}^+)_{(\tau,t) \in \tilde{E}^+}\},$$

где

$$E^- = E \cap [0, t_2], \quad E^+ = (E \cap [t_2, \infty)) - t_2, \quad a_{\tau,t}^+ = a_{\tau+t_2, t+t_2} \quad ((\tau, t) \in \tilde{E}^+).$$

В силу следствия 2 существует траектория $\chi^- = (x_t^-)_{t \in E^-}$ модели \mathfrak{M}^- такая, что $x_{t_2}^- = x_2$; в силу теоремы найдется траектория $\chi^+ = (x_t^+)_{t \in E^+}$ модели \mathfrak{M}^+ , исходящая из точки x_2 и такая, что $x_{t_1-t_2}^+ = x_1$. Нетрудно проверить, что семейство $\chi = (x_t)_{t \in E}$, где

$$x_t = \begin{cases} x_t^-, & t \in E^-, \\ x_{t-t_2}^+, & t \in t_2 + E^+ \end{cases}$$

является траекторией технологической модели \mathfrak{M} , причем эта траектория проходит в момент t_i через точку x_i ($i = 1, 2$).

3. Дискретные модели. В дальнейшем часто придется рассматривать модели, у которых множество моментов времени дискретно. Множество E , элементы которого являются неотрицательными числами (в частности, $0 \in E$), назовем *дискретным*, если для каждого элемента из E найдется непосредственно за ним следующий (в смысле порядка, индуцированного из R^1).

Технологическую модель

$$\mathfrak{M} = \{E, (a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\}$$

назовем *дискретной*, если множество E дискретно. Используя условие согласования (8.1), нетрудно проверить, что в случае, когда модель \mathfrak{M} дискретна, семейство отображений $(a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}$ полностью определяется семейством *)

$(a_{t', t})_{t \in E}$, где $t' = \min_{\tau \in E, \tau > t} \tau$. Если \mathfrak{M} — дискретная модель,

то, как следует из сказанного выше, семейство $\chi = (x_t)_{t \in E}$ входит в пучок траекторий $P_{\mathfrak{M}}$ модели \mathfrak{M} тогда и только тогда, когда

$$x_0 \in K_0, \quad x_{t'} \in a_{t', t}(x_t) \quad (t \in E).$$

Вернемся теперь к общему случаю. Пусть E — произвольное множество неотрицательных чисел ($0 \in E$, $0 < \sup E$). Обозначим супремум E через T . Технологическую модель

$$\mathfrak{M} = \{E, (a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\}$$

назовем *моделью первого рода*, если $T \in E$, и *моделью второго рода* в противном случае. Иными словами, модель \mathfrak{M} — первого рода, если множество индексов этой модели имеет «последний элемент», \mathfrak{M} — второго рода, если этого «последнего элемента» нет.

Пусть $\mathfrak{M} = \{E, (a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\}$ — технологическая модель второго рода и e — дискретное конфинальное подмножество множества E (*конфинальность e* означает, по определению, что для любого числа $t \in E$ найдется число $t' \in e$ такое, что $t' > t$). Дискретную модель

$$\mathfrak{M}_e = \{e, (a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{e}}\}$$

назовем *дискретным разряжением модели \mathfrak{M}* . Нетрудно проверить справедливость следующих утверждений:

а) если $\chi = (x_t)_{t \in E}$ — траектория модели \mathfrak{M} , то семейство $\chi_e = (x_t)_{t \in e}$ является траекторией модели \mathfrak{M}_e ;

*) Более точно: если $(\tau, t) \in \tilde{E}$ и $\theta = \max_{t \in E, t < \tau} t$ ($\tau = \theta'$), то

$$a_{\tau, t} = a_{\theta', \theta} \circ \dots \circ a_{(t)', t'} \circ a_{t', t}.$$

б) если $\chi' = (x_t)_{t \in e}$ — траектория модели \mathfrak{M}_e , то найдется траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} такая, что $x_t = x'_t (t \in e)$.

4. Подмодели. Рассмотрим технологическую модель

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\}.$$

Пусть $x \in K_0$. Через $\Gamma_t^x (t \in E, t > 0)$ обозначим грань*). $\Gamma(a_{t, 0}(x))$ конуса K_t , порожденную множеством $a_{t, 0}(x)$. Положим также $\Gamma_0^x = \Gamma(\{x\})$, где $\Gamma(\{x\})$ — грань конуса K_0 , порожденная точкой x . Через L_t^x обозначим аффинную оболочку $\Gamma_t^x - \Gamma_t^x$ конуса $\Gamma_t^x (t \in E)$.

Напомним, что, в силу предложения 2.15,

$$\Gamma_0^x = \text{Co}(\langle 0, x \rangle), \quad \Gamma_t^x = \text{Co}(na_{t, 0}(x)) \quad (8.2)$$

(здесь символ Co означает взятие конической оболочки, символ n — взятие нормальной оболочки; нормальная оболочка множества $a_{t, 0}(x)$ понимается в смысле конуса K_t (или, что то же самое, в смысле конуса Γ_t^x ; напомним, что в силу предложения 2.14 обе эти нормальные оболочки совпадают)).

Рассмотрим объект

$$\mathfrak{M}^x = \{E, (L_t^x)_{t \in E}, (\Gamma_t^x)_{t \in E}, (a_{\tau, t}^x)_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\} \quad (8.3)$$

(где через $a_{\tau, t}^x$ обозначено сужение отображения $a_{\tau, t}$ на конус Γ_t^x) и покажем, что этот объект является технологической моделью.

В самом деле, как следует непосредственно из определения, конус Γ_t^x является выпуклым, замкнутым и выступающим. Кроме того, в силу предложения 2.12 этот конус телесен (в пространстве L_t^x).

Проверим теперь суперлинейность отображений $a_{\tau, t}^x ((\tau, t) \in \tilde{E})$; точнее говоря, покажем, что $a_{\tau, t}^x \in A(\Gamma_t^x, \Gamma_\tau^x)$.

В доказательстве нуждаются лишь следующие утверждения

- 1) $a_{\tau, t}^x(\Gamma_t^x) \subset \Gamma_\tau^x$,
- 2) $a_{\tau, t}^x(\Gamma_t^x) \cap \text{int } \Gamma_\tau^x \neq \emptyset$.

* Опредeление грани $\Gamma(\xi)$, порожденной множеством ξ , см. в п. 11 § 2.

Начнем с утверждения 1). Пусть $y \in \Gamma_t^x$ (определенности ради, считаем, что $t > 0$). Привлекая формулу (8.2), найдем число $\lambda > 0$, при котором выполняется соотношение $\lambda y \in na_{t,0}(x)$. По свойствам нормальной оболочки найдем элемент u из множества $a_{t,0}(x)$ такой, что $u \geq \geq \lambda y$. (Мы считаем, что пространство X_t упорядочено конусом K_t .) Отображение $na_{\tau,t}$ суперлинейно и, кроме того, $0 \in na_{\tau,t}(x)$ при всех $x \in K_t$. Поэтому (см. предложение 4.11) оно возрастает, т. е.

$$na_{\tau,t}(u) \supset na_{\tau,t}(\lambda y).$$

С другой стороны, поскольку $u \in a_{t,0}(x)$, то

$$a_{\tau,t}(u) \subset a_{\tau,t} \circ a_{t,0}(x) = a_{\tau,0}(x)$$

и, стало быть, $na_{\tau,t}(u) \subset na_{\tau,0}(x)$. Итак,

$$a_{\tau,t}(\lambda y) \subset na_{\tau,t}(\lambda y) \subset na_{\tau,t}(u) \subset na_{\tau,0}(x),$$

откуда, снова привлекая формулу (8.2), получим

$$a_{\tau,t}^x(y) = a_{\tau,t}(y) \subset \frac{1}{\lambda} na_{\tau,0}(x) \subset \Gamma_{\tau}^x.$$

Таким образом, утверждение 1) доказано.

Перейдем к утверждению 2). Мы покажем, что имеет место соотношение

$$a_{\tau,0}(\Gamma_0^x) \cap \text{int } \Gamma_{\tau}^x \neq \emptyset \quad (\tau \in E, \tau > 0). \quad (8.4)$$

Утверждение 2) легко следует из (8.4). В самом деле,

$$a_{\tau,t}^x(\Gamma_t^x) = a_{\tau,t}(\Gamma_t^x) \supset a_{\tau,t}(a_{t,0}(\Gamma_0^x)) = a_{\tau,0}(\Gamma_0^x),$$

и потому, если (8.4) выполнено, то $a_{\tau,t}^x(\Gamma_t^x) \cap \text{int } \Gamma_{\tau}^x \neq \emptyset$ (в чем и заключается утверждение 2)).

Докажем формулу (8.4). Предполагая, что она неверна, найдем собственную грань Γ конуса Γ_{τ}^x , содержащую множество $a_{\tau,0}(\Gamma_0^x)$. Поскольку $a_{\tau,0}(x) \subset a_{\tau,0}(\Gamma_0^x)$, то $a_{\tau,0}(x) \subset \Gamma$ и, стало быть, $\Gamma_{\tau}^x = \Gamma(a_{\tau,0}(x)) \subset \Gamma$, что невозможно. Таким образом, формула (8.4), а с ней и утверждение 2) доказаны.

Мы проверили, что $a_{\tau,t}^x \subset A(\Gamma_t^x, \Gamma_{\tau}^x)$. Кроме того, семейство $(a_{\tau,t}^x)_{(\tau,t) \in \tilde{E}}$ удовлетворяет условию согласования.

Итак, объект \mathfrak{M}^x , определенный формулой (8.3), действительно является технологической моделью. Будем говорить, что \mathfrak{M}^x — *подмодель* модели \mathfrak{M} , порожденная точкой x .

Предложение 8.1. Пусть $x, y \in K_0$. Подмодели \mathfrak{M}^x и \mathfrak{M}^y , порожденные точками x и y соответственно, совпадают тогда и только тогда, когда $\Gamma_0^x = \Gamma_0^y$.

Доказательство. Если $\mathfrak{M}^x = \mathfrak{M}^y$, то и $\Gamma_0^x = \Gamma_0^y$. Докажем обратное утверждение. Так как $\Gamma_0^x = \Gamma_0^y$, то $y \in \Gamma_0^x$, и потому, как следует из формулы (8.2), найдется такое число $\lambda > 0$, что $\lambda y \in \langle 0, x \rangle$. Отображение $na_{t,0}$ возрастает, и потому $na_{t,0}(x) \supset na_{t,0}(\lambda y)$.

Из сказанного вытекает, что

$$\Gamma_t^x = \text{Co}(na_{t,0}(x)) \supset \text{Co}(na_{t,0}(\lambda y)) = \text{Co}(na_{t,0}(y)) = \Gamma_t^y.$$

Поскольку x и y полностью равноправны, то $\Gamma_t^y \supset \Gamma_t^x$ и, стало быть, $\Gamma_t^x = \Gamma_t^y$. Полученное равенство и доказывает предложение.

С л е д с т в и е. Если конус K_0 многогранен, то модель \mathfrak{M} может иметь лишь конечное число различных подмоделей.

Если x — внутренняя точка конуса K_0 , то, как нетрудно проверить, $\mathfrak{M}^x = \mathfrak{M}$.

В самом деле, как следует из предложения 4.7, в нашем случае

$$a_{t,0}(x) \cap \text{int } K_t \neq \emptyset,$$

и потому $\Gamma(a_{t,0}(x)) = K_t$. Кроме того, $\Gamma_0^x = K_0$.

Отметим еще, что каждая траектория подмодели \mathfrak{M}^x является траекторией модели \mathfrak{M} ; обратно, каждая траектория модели \mathfrak{M} , исходящая из точки, лежащей на грани Γ_0^x , является траекторией модели \mathfrak{M}^x .

5. Оптимальные траектории в моделях первого рода. Рассмотрим модель первого рода:

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_{\tau,t})_{(\tau,t) \subset \tilde{E}}\}.$$

Положим $T = \sup E$. Напомним, что, по определению, $T \in E$.

Траекторию $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} назовем *слабо оптимальной*, если найдется отличный от нуля функционал

f из конуса K_T^* такой, что

$$f(x_T) = \max_{y \in a_{T,0}(x_0)} f(y). \quad (8.5)$$

Из любой точки x_0 конуса K_0 исходят слабо оптимальные траектории (это вытекает из компактности множества $a_{T,0}(x_0)$).

Если трактовать элементы конуса K_T^* как цены «продуктов» в момент T , то слабую оптимальность можно интерпретировать следующим образом: траектория χ слабо оптимальна, если найдется такой ненулевой вектор цен в конечный момент T , что конечное состояние этой траектории имеет большую стоимость (по указанным ценам), нежели любой другой выпуск, который может быть получен из начального состояния траектории за весь период времени функционирования модели.

Про траекторию χ , удовлетворяющую равенству (8.5), будем также говорить, что она *слабо оптимальна в смысле f* .

Заметим, что класс слабо оптимальных траекторий в некотором смысле слишком обширен. В самом деле, пусть точка $x_0 \in K_0$ такова, что множество $a_{T,0}(x_0)$ содержится в гиперплоскости некоторого функционала, скажем f , положительного на конусе K_T . Тогда каждая траектория, исходящая из точки x_0 , будет слабо оптимальной (в смысле f). Если $f(y) > 0$ ($y \in a_{T,0}(x_0)$), то такое положение дел достаточно естественно: каждый элемент y множества $a_{T,0}(x_0)$ является в некотором смысле «экстремальным элементом» этого множества (например, $\lambda y \notin a_{T,0}(x_0)$ при $\lambda > 1$). Если же $f(y) = 0$ ($y \in a_{T,0}(x_0)$), то из точки x_0 могут выходить оптимальные траектории, приходящие в заведомо «неэкстремальный элемент» (в указанном выше смысле).!

В связи со сказанным представляет интерес описать траектории, «приходящие в экстремальный элемент».

Траекторию $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} , исходящую из точки x , назовем *оптимальной (эффективной)*, если она слабо оптимальна, как траектория подмодели \mathfrak{M}^x ; иными словами, если найдется функционал f из пространства $(L_t^x)^*$, положительный на конусе Γ_t^x , отличный от нуля и такой, что

$$f(x_T) = \max_{y \in a_{T,0}^x(x)} f(y) = \max_{y \in a_{T,0}(x)} f(y). \quad (8.6)$$

Указанную траекторию будем иногда называть *оптимальной в смысле f* . Отметим, что оптимальные траектории исходят из любой точки x конуса K_0 .

Так как x является внутренней точкой конуса Γ_0^x , то (предложение 4.7) множество $a_{T,0}^x(x)$ содержит внутренние точки конуса Γ_T^x , и потому для оптимальной в смысле f траектории $\chi = (x_t)_{t \in E}$ выполняется $\max_{y \in a_{T,0}^x(x)} f(y) = f(x_T) > 0$ (здесь и в дальнейшем мы считаем, что $a_{T,0}(x) \neq \{0\}$ и, стало быть, $\Gamma_T^x \neq \{0\}$).

Имеет место

Предложение 8.2. *Каждая оптимальная траектория модели \mathfrak{M} является и слабо оптимальной траекторией этой модели.*

Доказательство. Пусть $\chi = (x_t)_{t \in E}$ — траектория модели \mathfrak{M} , исходящая из точки x и оптимальная в смысле f . Предположим сначала, что множество $a_{T,0}(x)$ содержит внутренние точки конуса K_T . Тогда $\Gamma_T^x = K_T$, и предложение очевидно. В противном случае (если $a_{T,0}(x) \cap \text{int } K_t = \emptyset$), используя теорему отделимости, найдем функционал f такой, что

$$\max_{y \in a_{T,0}(x)} f(y) = \inf_{z \in \text{int } K_T} f(z) = 0.$$

Функционал $f \in K_T^*$ и χ — слабо оптимальна в смысле f .

Предложение доказано.

Замечание. Если $x \in \text{int } K_0$, то классы слабо оптимальных и оптимальных траекторий, исходящих из точки x , совпадают. (Это справедливо, поскольку в данном случае $\mathfrak{M}^x = \mathfrak{M}$.)

Продолжим изучение оптимальных траекторий, исходящих из точки x . Нам понадобятся следующие определения.

Если ξ — подмножество векторного пространства X ($\xi \neq \emptyset, \{0\}$), то элемент x множества ξ назовем *границным сверху* (соответственно, *границным снизу*) элементом этого множества, если $\lambda x \notin \xi$ при $\lambda > 1$ (соответственно, при $0 < \lambda < 1$).

Предложение 8.3. *Траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} , исходящая из точки x , оптимальна тогда и только тогда, когда x_T является границным сверху элементом множества $pa_{T,0}(x)$.*

Доказательство. 1) Пусть траектория χ оптимальна в смысле функционала f (где $f \in (\Gamma_T^x)^*$). Тогда (предложение 2.5)

$$f(x_T) = \max_{y \in a_{T,0}(x)} f(y) = \max_{y \in na_{T,0}(x)} f(y)$$

(где $na_{T,0}(x)$ — нормальная оболочка множества $a_{T,0}(x)$ в смысле конуса Γ_T^x , или, что то же самое, конуса K_T). Покажем, что x_T — граничный сверху элемент множества $na_{T,0}(x)$. В самом деле, предполагая противное, найдем число $\lambda > 1$ такое, что $\lambda x_T \in na_{T,0}(x)$. Так как $f(x_T) > 0$, то

$$f(x_T) = \max_{y \in na_{T,0}(x)} f(y) \geq f(\lambda x_T) = \lambda f(x_T) > 0,$$

что невозможно.

2) Предположим теперь, что x_T — граничный сверху элемент множества $na_{T,0}(x)$, и покажем, что траектория χ оптимальна. В силу предложения 2.12 множество $a_{T,0}(x)$ содержит внутреннюю (в пространстве L_T^x) точку грани $\Gamma_T^x = \Gamma(a_{T,0}(x))$. Отсюда вытекает телесность множества $na_{T,0}(x)$. Обозначим это множество через Ω и введем в пространстве L_T^x норму $\|\cdot\|_\Omega$, единичный шар S которой имеет вид $S = \Omega - \Omega$. (Эта норма изучалась в п. 12 § 2; там было показано, в частности, что эта норма монотонна относительно конуса Γ_T^x и, кроме того, что Ω равно множеству $\{y \in \Gamma_T^x \mid \|y\|_\Omega \leq 1\}$.)

Так как x_T — граничный сверху элемент Ω , то $\|x_T\|_\Omega = 1$. Привлекая теперь предложение 2.11, найдем функционал $f \in (\Gamma_T^x)^*$ такой, что

$$f(x_T) = \|x_T\|_\Omega = 1, \quad \|f\| = \max_{y \in \Omega - \Omega} f(y) = 1.$$

Траектория χ оптимальна в смысле f .

Предложение доказано.

Иногда нам будет удобно использовать предложение 8.3 в следующем виде.

Предложение 8.3'. Траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} , исходящая из точки x , оптимальна тогда и только тогда, когда

$$\|\hat{x}_T\|_{na_{T,0}(x)} = 1.$$

Доказательство предложения 8.3' по существу совпадает с доказательством предложения 8.3.

Оптимальность траектории $\chi = (x_t)_{t \in E}$ была определена в терминах ее конечного состояния x_T . Полезно описать оптимальность в терминах начального состояния x_0 .
Справедливо

Предложение 8.4. *Траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} , исходящая из точки x , оптимальна тогда и только тогда, когда x является граничной снизу точкой множества $(na_{T,0})^{-1}(x_T)$.*

Доказательство. Пусть траектория χ оптимальна. Если x_0 не является граничной снизу точкой множества $(na_{T,0})^{-1}(x_T)$, найдется $\lambda \in (0, 1)$ такое, что $\lambda x_0 \in (na_{T,0})^{-1}(x_T)$. В этом случае $\frac{1}{\lambda} x_T \in na_{T,0}(x_0)$, что невозможно, так как (предложение 8.3) x_T — граничный сверху элемент множества $na_{T,0}(x_0)$. (Мы использовали здесь положительную однородность отображения $na_{T,0}$.) Подобными аргументами доказывается и обратное утверждение.

Предложение доказано.

Приведем экономическую интерпретацию этого предложения, предполагая, что отображение $a_{T,0}$ нормально. В этом случае множество $(na_{T,0})^{-1}(x_T) = (a_{T,0})^{-1}(x_T)$ интерпретируется как совокупность всех затрат, при которых возможен выпуск x_T . Предложение утверждает, что оптимальность траектории χ равносильна следующему: при затратах λx_0 ($\lambda < 1$) выпуск x_T невозможен.

Из предложения 8.4 следует

Теорема 8.2 (принцип оптимальности). *Если $\chi = (x_t)_{t \in E}$ — оптимальная траектория модели $\mathfrak{M} = \{E, (a_{\tau,t})_{(\tau,t) \in \tilde{E}}\}$, то при любом $\theta \in E$, $\theta > 0$ семейство $\chi_\theta = (x_t)_{t \in E, t \leq \theta}$ является оптимальной траекторией модели*

$$\mathfrak{M}_\theta = \{E \cap [0, \theta], (a_{\tau,t})_{\tau, t \in E \cap [0, \theta]; \tau > t\}.$$

Доказательство. Так как χ оптимальна, то x_0 — граничная снизу точка множества $(na_{T,0})^{-1}(x_T)$. Поскольку

$$(na_{\theta,0})^{-1}(x_\theta) \subset (na_{\theta,0})^{-1} \circ (na_{T,\theta})^{-1}(x_T) = (na_{T,0})^{-1}(x_T),$$

то x_0 является граничной снизу точкой и множества $(na_{\theta,0})^{-1}(x_\theta)$, откуда следует справедливость теоремы.

Опишем еще одно свойство оптимальных траекторий, вытекающее из предложения 8.4.

Предложение 8.5. Если траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} оптимальна, то найдется ненулевой функционал f из конуса K_0^* такой, что

$$f(x) = \min_{y \in (na_{T,0})^{-1}(x_T)} f(y). \quad (8.7)$$

Доказательство. Будем считать, что пространство X_0 упорядочено с помощью конуса K_0 . Множество $(na_{T,0})^{-1}(x_T)$ выпукло и замкнуто. Так как $0 \in na_{T,0}(x)$ при всех $x \in K_0$, то (см. предложение 4.11) отображение $na_{T,0}$ возрастает, и потому (предложение 4.8) множество $(na_{T,0})^{-1}(x_T)$ является K_0 -устойчивым. Отсюда следует, в частности, что это множество телесно. Поскольку x_0 является граничной снизу (и, следовательно, граничной) точкой множества $(na_{T,0})^{-1}(x_T)$, то найдется функционал $f \in X_0^*$ такой, что $f \neq 0$ и

$$f(x_0) = \min_{y \in (na_{T,0})^{-1}(x_T)} f(y).$$

Поскольку

$$x_0 + K_0 \subset (na_{T,0})^{-1}(x_T),$$

то f ограничен снизу на конусе K_0 и потому положителен.

Предложение доказано.

З а м е ч а н и е. Попутно мы показали, что каждый линейный функционал f , удовлетворяющий условию (8.7), принадлежит конусу K_0^* .

Предложение 8.5 означает, что для каждой оптимальной траектории $\chi = (x_t)_{t \in E}$ найдутся такие цены в начальный момент, что вектор x_0 является наивыгоднейшим по этим ценам вектором затрат, из которых в момент T получается данный выпуск x_T .

Следующий ниже пример показывает, что предложение 8.5 не допускает обращения.

П р и м е р. Рассмотрим модель

$$\mathfrak{M} = \{(0, 1), (X_t)_{t=0,1}, (K_t)_{t=0,1}, a_{1,0}\},$$

где $X_0 = X_1 = R^2$, $K_0 = K_1 = R_{\frac{1}{2}}^2$; отображение $a_{1,0}$ определено на

R_+^2 формулой (рис. 17):

$$a_{1,0}(x) = \{y \in R_+^2 \mid y^2 \leq x^2, y^1 + y^2 \leq x^1 + x^2\}.$$

Более общее отображение рассматривалось в примере 3 п. 8 § 4. Там было показано, что это отображение двойственно к некоторому

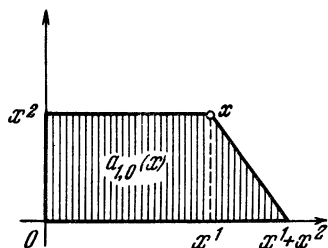


Рис. 17.

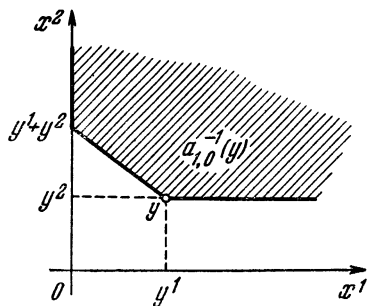


Рис. 18.

суперлинейному и, стало быть, суперлинейно и нормально.

Очевидно, для $y \in R_+^2$ (рис. 18)

$$a_{1,0}^{-1}(y) = \{x \in R_+^2 \mid x^2 \geq y^2, x^1 + x^2 \geq y^1 + y^2\}.$$

Рассмотрим теперь траекторию $\chi = (x_t)_{t=0,1}$ модели \mathfrak{M} , где $x_0 = (0, 1)$, $x_1 = (1/3, 1/3)$. Точка x_1 является внутренней точкой множества $a_{1,0}(x_0)$ (рис. 19), и потому траектория χ не оптимальна

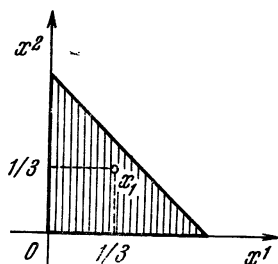


Рис. 19.

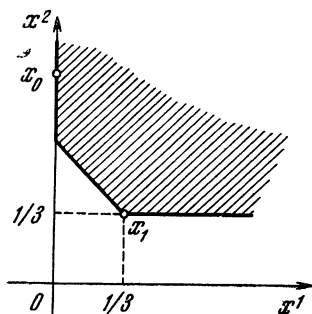


Рис. 20.

(и даже не слабо оптимальна). В то же время функционал f , для которого выполнено (8.7), существует. Таким функционалом является, например, $f = (1, 0)$ (см. рис. 20, на котором гиперплоскость, определяемая этим функционалом и проходящая через точку x_0 , совпадает с осью Ox_2).

6. Правильные модели. С экономической точки зрения наибольший интерес представляют технологические модели

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\}$$

такие, что X_t ($t \in E$) — арифметическое пространство, K_t ($t \in E$) — конус векторов пространства X_t с неотрицательными компонентами.

Модели, обладающие указанным свойством, будем называть *правильными*. Следующее предложение показывает, что в правильной модели первого рода оптимальность траектории можно сформулировать в терминах функционалов из конуса $(K_T)^*$ (а не конуса $(\Gamma_T^x)^*$).

Предложение 8.6. Пусть $\mathfrak{M} = \{E, (a_{\tau, t})_{\tau, t \in \tilde{E}}\}$ — правильная модель первого рода и точка x из конуса K_0 такова, что $a_{T, 0}(x) \neq \{0\}$ (здесь $T = \sup E$). Для того чтобы траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} была оптимальна, необходимо и достаточно, чтобы нашелся функционал f из конуса K_T^* такой, что

$$f(x_T) = \max_{y \in a_{T, 0}(x)} f(y) > 0. \quad (8.8)$$

Доказательство. 1) *Необходимость.* Так как траектория χ оптимальна, то найдется функционал \tilde{f} , положительный на конусе Γ_T^x и такой, что

$$\tilde{f}(x_T) = \max_{y \in a_{T, 0}(x)} \tilde{f}(y) > 0.$$

Как следует из определения правильной модели, конус Γ_T^x является гранью конуса R_+ . Определим на R^n функционал f , положив для $x \in R^n$

$$f(x) = \tilde{f}(\tilde{x}),$$

где \tilde{x} — проекция элемента x на подпространство $L_T^x = = \Gamma_T^x - \Gamma_T^x$. Функционал f положителен и

$$f(x_T) = \max_{y \in a_{T, 0}(x)} f(y) > 0.$$

2) *Достаточность.* Пусть функционал f удовлетворяет условию (8.8). Сужение \tilde{f} этого функционала на пространство L_T отлично от нуля (ибо $f(x_T) > 0$). Ясно, что траектория χ оптимальна в смысле \tilde{f} .

Предложение доказано.

7. Оптимальные траектории в моделях второго рода. Перейдем к изучению траекторий в моделях второго рода. Прежде всего введем одно важное в дальнейшем определение.

Пусть

$$\mathfrak{M} = \{E, (a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\}$$

— технологическая модель. Пусть, далее, $T \in E$, $T > 0$. Положим $E_T = E \cap [0, T]$ и рассмотрим модель

$$\mathfrak{M}_T = \{E_T, (a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}_T}\}.$$

Траектории модели \mathfrak{M}_T мы будем называть *T-траекториями* модели \mathfrak{M} . Таким образом, *T-траекторией* модели \mathfrak{M} называется семейство $\chi_T = (x_t)_{t \in E_T}$ такое, что

$$x_t \in K_t, \quad x_{\tau} \in a_{\tau, t}(x_t) \quad ((\tau, t) \in \tilde{E}, \tau \leq T).$$

Естественным образом определяются *оптимальные (слабо оптимальные) T-траектории*.

Если $\chi = (x_t)_{t \in E}$ есть траектория модели \mathfrak{M} , то *T-траекторией* $\chi_T = (x_t)_{t \in E_T}$ этой модели будем называть *T-куском* (или просто *куском*) траектории χ .

Заметим, что в новых терминах принцип оптимальности для моделей первого рода (теорема 8.2) может быть сформулирован так: *если траектория χ оптимальна, то и τ -куски этой траектории ($\tau \in E$, $\tau > 0$) оптимальны*.

Будем считать теперь, что модель \mathfrak{M} — второго рода. Благодаря принципу оптимальности естественно дать следующее определение.

Траекторию χ модели \mathfrak{M} назовем *оптимальной (эффективной по другой терминологии)*, если при любом $T \in E$, $T \neq 0$ ее *T-куском* оптимален как траектория модели \mathfrak{M}_T .

При исследовании оптимальных траекторий в модели первого рода мы использовали множество $(na_{T, 0})^{-1}(x_T)$. Введем в рассмотрение аналог этого множества. Если $\chi = (x_t)_{t \in E}$ — траектория модели \mathfrak{M} , то положим

$$(na)^{-1}(\chi) = \bigcup_{t \in E, t > 0} (na_{t, 0})^{-1}(x_t).$$

Заметим, что множество $(na)^{-1}(\chi)$ не совпадает со всем конусом K_0 (ибо $0 \notin (na)^{-1}(\chi)$). Это множество, вообще го-

вора, не замкнуто и его замыкание может совпадать с K_0 (соответствующий пример приведен в п. 5 § 9).

Заметим еще, что в обозначении указанного выше множества не отмечено, какой моделью оно определяется; из контекста всегда ясно, о какой модели идет речь.

Если точка $x_0 \in K_0$ такова, что $a_{t,0}(x_0) \neq \{0\}$ при всех $t \in E$, $t \neq 0$, то, как нетрудно проверить, траектория χ модели \mathfrak{M} , исходящая из x , оптимальна тогда и только тогда, когда x является граничным снизу элементом множества $(na)^{-1}(\chi)$.

Перейдем к доказательству существования оптимальных траекторий. Будем рассматривать точки $x \in K_0$ такие, что $a_{t,0}(x) \neq \{0\}$ ($t \in E$, $t \neq 0$). (В противном случае существование оптимальной траектории, исходящей из точки x , очевидно.) Рассмотрим вначале дискретную модель

$$\mathfrak{M}_d = \{E, (a_{\tau,t})_{(\tau,t) \in \tilde{E}}\}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что E совпадает с множеством неотрицательных целых чисел.

Л е м м а 8.1. *Из каждой точки x конуса K_0 исходит оптимальная траектория модели \mathfrak{M}_d .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При каждом натуральном T рассмотрим оптимальную T -траекторию $\chi_T = (x, x_1^T, \dots, x_T^T)$ модели \mathfrak{M}_d , исходящую из точки x . Используя теорему 8.2 (принцип оптимальности), получим, что t -кусочек траектории χ_T при любом натуральном t , не превышающем T , является оптимальной t -траекторией модели *) \mathfrak{M}_d . Из предложения 8.3' вытекает, что

$$\|x_t^T\|_{na_{t,0}(x)} = 1 \quad (T = 1, 2, \dots; t = 1, 2, \dots, T),$$

а потому последовательности $(x_t^T)_{T=t}^\infty$ ($t = 1, 2, \dots$) ограничены.

Применяя диагональный процесс, выберем подпоследовательность номеров $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ так, чтобы существовали пределы

$$\lim x_1^{T_k} = x_1, \quad \lim x_2^{T_k} = x_2, \dots, \lim x_t^{T_k} = x_t, \dots$$

*) То есть оптимальной траекторией модели $(\mathfrak{M}_d)_t$.

Последовательность $\chi = (x, x_1, \dots, x_t, \dots)$ является траекторией модели \mathfrak{M}_d . При этом

$$\|x_t\|_{na_{t,0}(x)} = 1,$$

и потому t -кусок траектории χ является оптимальной t -траекторией при любом натуральном t . Последнее означает, что траектория χ оптимальна.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь снова произвольную конечномерную модель второго рода $\mathfrak{M} = \{E, (a_{\tau,t})_{(\tau,t) \in \tilde{E}}\}$.

Теорема 8.3. Из каждой точки x конуса K_0 исходит оптимальная траектория модели \mathfrak{M} .

Доказательство. Пусть e — конфинальное дискретное подмножество множества E . Рассмотрим модель \mathfrak{M}^e — дискретное разряжение \mathfrak{M} (см. п. 3). В силу леммы 8.1 существует оптимальная траектория $\chi' = (x_i)_{i \in e}$ модели \mathfrak{M}^e , исходящая из точки x . Как было отмечено в п. 3, найдется траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} такая, что $x_t = x_i$ ($t \in e$).

Покажем, что траектория χ оптимальна. Предполагая противное, найдем $\tau \in E$ так, что τ -кусок χ_τ траектории χ не будет оптимальным. Поскольку e конфинально, то существует $\tau' \in e$ такое, что $\tau' > \tau$. Из определения траектории χ' следует, что τ' -кусок этой траектории является оптимальной траекторией модели $(\mathfrak{M}^e)_{\tau'}$, а потому τ' -кусок траектории χ является оптимальной траекторией модели $\mathfrak{M}_{\tau'}$. Применяя принцип оптимальности, получим, что траектория χ_τ модели \mathfrak{M}_τ оптимальна, что противоречит нашему предположению. Полученное противоречие и доказывает теорему.

§ 9. ХАРАКТЕРИСТИКА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

1. Двойственная модель. Пусть

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_{\tau,t})_{(\tau,t) \in \tilde{E}}\} \quad (9.1)$$

— технологическая модель. Наряду с моделью \mathfrak{M} рассмотрим объект

$$\mathfrak{M}' = \{E, (X_t^*)_{t \in E}, (K_t^*)_{t \in E}, (a'_{\tau,t})_{(\tau,t) \in \tilde{E}}\}$$

(где $a'_{\tau, t}$ — отображение, двойственное к $a_{\tau, t}$) и покажем, что \mathfrak{M}' также является технологической моделью. Отметим прежде всего, что K_t^* — выпуклый замкнутый выступающий и телесный конус. Далее, привлекая предложение 4.16, получим, что отображение $a'_{\tau, t}$ суперлинейно; точнее говоря, $a'_{\tau, t} \in A(K_t^*, K_\tau^*)$; в силу теоремы 4.2

$$a'_{t'', t} = (a_{t'', t'} \circ a_{t', t})' = a'_{t'', t'} \circ a'_{t', t} \quad (t'', t', t \in E, t < t' < t''),$$

откуда следует, что семейство суперлинейных отображений $(a'_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \bar{E}}$ удовлетворяет условию согласования.

Итак, мы проверили, что объект \mathfrak{M}' действительно является технологической моделью. Будем называть эту модель *двойственной* по отношению к \mathfrak{M} .

Как непосредственно вытекает из определения, траектория $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M}' обладает следующим свойством: для любой траектории $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} выполняется

$$f_t(x_t) \geq f_\tau(x_\tau) \quad (t, \tau \in E, \tau > t).$$

Иными словами, функция h_χ , определенная на множестве E формулой

$$h_\chi(t) = f_t(x_t) \quad (t \in E),$$

убывает.

Поскольку \mathfrak{M}' является технологической моделью, то имеет смысл говорить о модели \mathfrak{M}'' , двойственной к \mathfrak{M}' . Из теоремы 4.3 следует, что

$$\mathfrak{M}'' = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (na_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \bar{E}}\}.$$

В связи с этим модель \mathfrak{M}'' будем называть *нормальной оболочкой* модели \mathfrak{M} и обозначать символом $n\mathfrak{M}$.

Каждая траектория χ модели \mathfrak{M} является и траекторией модели $n\mathfrak{M}$. Из предложения 8.3 следует, что каждая оптимальная траектория модели \mathfrak{M} оптимальна и как траектория нормальной оболочки $n\mathfrak{M}$; обратно, если χ — оптимальная траектория модели $n\mathfrak{M}$ и в то же время χ — траектория модели \mathfrak{M} , то χ — оптимальная траектория этой модели.

Отметим еще, что, как вытекает из предложения 2.14, $(n\mathfrak{M})^x = n(\mathfrak{M}^x)$ для любой точки x из конуса K_0 .

2. ε -характеристика слабо оптимальных траекторий. Будем считать в этом пункте, что модель \mathfrak{M} , определенная формулой (9.1), является моделью первого рода. Положим, как обычно, $T = \sup E$. Имеет место

Теорема 9.1 (об ε -характеристике слабо оптимальных траекторий). Пусть $x_0 \in K_0$, $f_T \in K_T^*$ ($x_0 \neq 0$, $f_T \neq 0$) и $\bar{\chi} = (\bar{x}_t)_{t \in E}$ — траектория модели \mathfrak{M} , исходящая из точки x_0 . Для того чтобы траектория $\bar{\chi}$ была слабо оптимальна в смысле функционала f_T , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось семейство $\varphi_\varepsilon = (f_t^\varepsilon)_{t \in E}$ ($f_t \in K_t^*$, $t \in E$) такое, что

1) для любой траектории $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} функция $h_\chi : t \rightarrow f_t^\varepsilon(x_t)$ ($t \in E$) убывает,

$$2) h_{\bar{\chi}}(0) - h_{\bar{\chi}}(T) < \varepsilon,$$

$$3) f_t^\varepsilon \neq 0 \quad (t \in E), \quad f_T^\varepsilon = f_T.$$

Доказательство. 1) *Необходимость.* Рассмотрим отображение $a_{T,0}$. В силу теоремы двойственности (теоремы 4.1) множество $(a'_{T,0})^{-1}(f_T)$ непусто и

$$f_T(\bar{x}_T) = \max_{y \in a_{T,0}(x_0)} f_T(y) = \inf_{g \in (a'_{T,0})^{-1}(f_T)} g(x_0). \quad (9.2)$$

Из (9.2) следует, что по данному $\varepsilon > 0$ найдется функционал f_0^ε из множества $(a'_{T,0})^{-1}(f_T)$ такой, что

$$f_0^\varepsilon(x_0) < f_T(\bar{x}_T) + \varepsilon.$$

Используя теорему 8.1, найдем траекторию $\varphi_\varepsilon = (f_t^\varepsilon)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M}' , исходящую из точки f_0^ε и проходящую (в момент T) в точку f_T . Так как $a'_{T,t}$ — гейловское отображение и $f_T \neq 0$, то и $f_t^\varepsilon \neq 0$. Траектория φ_ε является искомым семейством.

2) *Достаточность.* Пусть теперь для любого $\varepsilon > 0$ найдется семейство $\varphi_\varepsilon = (f_t^\varepsilon)_{t \in E}$, удовлетворяющее условиям теоремы. Тогда если $y \in a_{T,0}(x_0)$, то найдется траектория χ модели \mathfrak{M} , соединяющая точки x_0 и y , и потому (условия 1) и 3) теоремы)

$$h_\chi(T) = f_T(y) \leq f_0^\varepsilon(x_0) = h_\chi(0).$$

С другой стороны (условие 2) теоремы),

$$f_0^\varepsilon(x_0) < f_T(\bar{x}_T) + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$f_T(\bar{x}_T) \leq \max_{y \in a_{T,0}(x_0)} f_T(y) < f_T(\bar{x}_T) + \varepsilon,$$

откуда ввиду произвольности ε и следует, что траектория $\bar{\chi}$ оптимальна в смысле f_T .

Теорема доказана.

Теорему 9.1 можно переписать в форме теоремы двойственности.

Пусть P — пучок траекторий модели \mathfrak{M} , \tilde{P} — совокупность всех семейств $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ ($f_t \in K_t^*$, $t \in E$) таких, что для любого элемента $\chi = (x_t)_{t \in E}$ множества P функция $h_\chi : t \rightarrow f_t(x_t)$ ($t \in E$) убывает. Очевидно, что \tilde{P} непусто: это множество включает в себя пучок P' траекторий модели \mathfrak{M}' и совпадает с этим пучком в случае, когда $a_{\tau,t}(K_t) = K_\tau$. Пусть $x_0 \in K_0$, $f_T \in K_T^*$ ($x_0 \neq 0$, $f_T \neq 0$). Сформулируем следующие задачи.

Задача I. Найти элемент $\bar{\chi}$ множества P такой, что $\text{Pr}_0 \bar{\chi} = x_0$ и

$$f_T(\text{Pr}_T \bar{\chi}) = \max_{\chi \in P, \text{Pr}_0 \chi = x_0} f_T(\text{Pr}_T \chi).$$

Задача II. Найти элемент $\bar{\varphi}$ множества \tilde{P} такой, что $\text{Pr}_T \bar{\varphi} = f_T$ и

$$(\text{Pr}_0 \bar{\varphi})(x_0) = \min_{\varphi \in \tilde{P}, \text{Pr}_T \varphi = f_T} (\text{Pr}_0 \varphi)(x_0).$$

Имеет место

Теорема 9.1'. *Справедливо равенство*

$$\max_{\chi \in P, \text{Pr}_0 \chi = x_0} f_T(\text{Pr}_T \chi) = \inf_{\varphi \in \tilde{P}, \text{Pr}_T \varphi = f_T} (\text{Pr}_0 \varphi)(x_0).$$

3. Траектории, допускающие характеристику. Теорема 9.1 дает повод для следующего определения. Будем говорить, что траектория $\bar{\chi} = (x_t)_{t \in E}$ модели первого рода \mathfrak{M} допускает слабую характеристику, если найдется семейство $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ ($f_t \in K_t^*$, $f_t \neq 0$, $t \in E$) такое, что

а) для любой траектории χ модели \mathfrak{M} функция $h_\chi : t \rightarrow f_t(x_t)$ ($t \in E$) убывает,

б) функция $h_{\bar{\chi}}$ постоянна (т. е. $h_{\bar{\chi}}(0) = h_{\bar{\chi}}(T)$).

Указанное семейство φ будем называть *слабой характеристикой* траектории χ .

Предложение 9.1. Если траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ допускает слабую характеристику $\varphi = (f_t)_{t \in E}$, то

$$f_T(x_T) = \max_{y \in a_{T,0}(x_0)} f_T(y),$$

$$f_0(x_0) = \min_{y \in a_{T,0}^{-1}(x_T)} f_0(y).$$

Доказательство очевидно.

Следствие. В условиях предложения траектория χ слабо оптимальна в смысле функционала f_T .

Оказывается, что траектория, допускающая слабую характеристику, не обязана быть оптимальной; в свою очередь оптимальная траектория не обязана допускать слабую характеристику. Подтвердим высказанные утверждения примерами.

Пример 1. Рассмотрим модель

$$\mathfrak{M} = \{(0, 1), (X_t)_{t=0,1}, (K_t)_{t=0,1}, a_{1,0}\},$$

где $X_0 = X_1 = R^2$, $K_1 = K_2 = R_+^2$, $a_{1,0}(x) = \langle 0, x \rangle$ ($x \in R_+^2$). Рассмотрим траекторию $\chi = (x_0, x_1)$ модели \mathfrak{M} , где $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (1/2, 0)$. Траектория χ не оптимальна, хотя и слабо оптимальна; тем не менее, эта траектория допускает слабую характеристику $\varphi = (f, f)$, где $f = (0, 1)$.

Пример 2. Рассмотрим модель

$$\mathfrak{M} = \{(0, 1\}, (X_t)_{t=0,1}, (K_t)_{t=0,1}, a_{1,0}\},$$

где, как и выше, $X_0 = X_1 = R^2$, $K_0 = K_1 = R_+^2$. Отображение $a_{1,0}$ определим следующим образом:

$$a_{1,0}(x) = \{y \in R_+^2 \mid y \leq (\sqrt{x^1 x^2} + x^1, \sqrt{x^1 x^2})\} \quad (x \in R_+^2).$$

Положим $x_0 = (1, 0)$. Так как $a_{1,0}(x_0) = \{y \in R_+^2 \mid y \leq x_0\}$, то траектория $\chi = (x_0, x_0)$ модели \mathfrak{M} оптимальна. Покажем, что эта траектория не допускает слабой характеристики. Предположим противное, и пусть $\varphi = (f_0, f_1)$ — слабая характеристика траектории χ . Тогда для любого $x \in R_+^2$ имеем

$$f_0^1 x^1 + f_0^2 x^2 \geq f_1^1 (\sqrt{x^1 x^2} + x^1) + f_1^2 \sqrt{x^1 x^2}$$

и, кроме того, $f_0^1 = f_1^1$. Из полученных соотношений следует (при $x^2 \neq 0$)

$$f_0^2 \geq (f_1^1 + f_1^2) \sqrt{\frac{x^1}{x^2}}.$$

Последнее неравенство должно выполняться при всех числах $x_1 \geq 0$ и $x_2 > 0$. Это, однако, невозможно, ибо $f_1 \neq 0$, и потому $f_1^1 + f_1^2 > 0$. Итак, наше предположение оказалось неверным и, стало быть, оптимальная траектория χ не допускает слабой характеристики.

Пример 1 дает повод для следующего определения. Будем говорить, что траектория $\bar{\chi} = (x_t)_{t \in E}$ допускает характеристику $\varphi = (f_t)_{t \in E}$, если φ является слабой характеристикой этой траектории и, кроме того, функция $h_{\bar{\chi}}$ (являющаяся постоянной) положительна.

Нетрудно проверить, что траектория, допускающая характеристику, оптимальна. (Обратное, разумеется, неверно.)

Важное свойство характеристики описывает следующее

Предложение 9.2.

Пусть $\chi = (x_t)_{t \in E}$ — траектория модели \mathfrak{M} , допускающая слабую характеристику $\varphi = (f_t)_{t \in E}$. Тогда для любого $\tau \in E$, $\tau \neq 0$, T выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \max_{y \in a_{\tau, 0}(x_0)} f_{\tau}(y) &= f_{\tau}(x_{\tau}) = \\ &= \min_{y \in (a_{T, \tau})^{-1}(x_T)} f_{\tau}(y). \end{aligned}$$

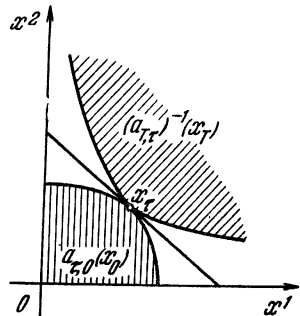


Рис. 21.

Если φ является характеристикой χ , то члены написанного выше равенства положительны (рис. 21).

Доказательство следует из предложения 9.1 и того обстоятельства, что τ -кусочек траектории, допускающей характеристику (слабую характеристику), также допускает характеристику (слабую характеристику).

4. Теоремы о характеристике в моделях первого рода. Как легко следует из доказательства теоремы 9.1, траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$, слабо оптимальная в смысле функционала f_T , допускает слабую характеристику $\bar{\varphi} = (f_t)_{t \in E}$ такую, что $\bar{f}_T = f_T$ тогда и только тогда, когда реализуется инфимум в формуле (9.2). Положим для $x \in K_0$

$$q(x) = \max_{y \in a_{T, 0}(x)} f_T(y). \quad (9.3)$$

Так как отображение $a_{T, 0}$ суперлинейно, то и функционал q , определенный на конусе K_0 формулой (9.3),

суперлинеен; при этом множество опорных к q совпадает с множеством $(a'_{T,0})^{-1}$. Инфимум в формуле (9.2) реализуется тогда и только тогда, когда функционал q имеет опорный в точке x_0 . Привлекая эти замечания, приведем некоторые достаточные условия, при которых оптимальная траектория допускает характеристику.

Теорема 9.2. Пусть x_0 — внутренняя точка конуса K_0 . Тогда любая оптимальная в смысле функционала f_T траектория, исходящая из x_0 , допускает характеристику $\bar{f} = (\bar{f}_t)_{t \in E}$ такую, что $\bar{f}_T = f_T$.

Доказательство. В силу теоремы 2.3 функционал q , определенный формулой (9.3), имеет опорный f_0 в точке x_0 . Так как $x_0 \in \text{int } K_0$, то $f_0(x_0) > 0$.

Теорема доказана.

Прежде чем привести еще одно достаточное условие существования характеристики, введем понятие о дифференцируемости конечно-множественных отображений по направлениям. Пусть X_i — конечномерное пространство, K_i — воспроизводящий выступающий конус в пространстве X_i ($i = 1, 2$), a — суперлинейное отображение конуса K_1 в $\Pi(K_2)$.

Подобно тому, как это было сделано в п. 5 § 3, отождествим множество $a(x)$ с функционалом $P_a(x)$, определенным на единичной сфере S_2^* пространства X_2^* формулой

$$P_a(x)(f) = \max_{y \in a(x)} f(y).$$

Это позволяет отождествить отображение a с функцией P_a , переводящей точку $x \in K_1$ в элемент $P_a(x) = P_a(x)$ пространства $C(S_2^*)$.

Элемент u пространства X_1 назовем *допустимым направлением* в точке $x \in K_1$, если найдется число $\alpha_u > 0$ такое, что отрезок $\{x + \alpha u \mid \alpha \in [0, \alpha_u]\}$ входит в K_1 . Совокупность всех допустимых в точке x направлений является выпуклым, вообще говоря, незамкнутым конусом. Заметим, что этот конус содержит все элементы конуса K_1 , а также элемент $-x$. Отображение a называется *дифференцируемым* в точке x из K_1 по (допустимому) направлению u , если найдется такая функция $p'_a(x, u)$ в пространстве $C(S_2^*)$, что

$$P_a(x + \alpha u) = P_a(x) + \alpha p'_a(x, u) + o_{x, u}(\alpha) \quad (\alpha > 0), \quad (9.4)$$

причем $\lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{o_{x, u}(\alpha)}{\alpha} = 0$.

Будем говорить, что отображение a *непрерывно дифференцируемо* в точке x , если

1) найдется такой замкнутый выпуклый конус L_x допустимых в точке x направлений, что $K_1 \subset L_x$, $-x \in L_x$ и по любому направлению $u \in L_x$ отображение a дифференцируемо,

2) отображение $u \rightarrow p'_a(x, u)$ (определяемое формулой (9.4)) конуса L_x в пространство $C(S_2^*)$ непрерывно.

Имеет место

Т е о р е м а 9.3. Пусть точка x_0 из конуса K_0 такова, что отображение $a_{T,0}$ непрерывно дифференцируемо в этой точке. (Мы рассматриваем по-прежнему технологическую модель (9.1).) Тогда каждая слабо оптимальная в смысле f_T траектория, исходящая из точки x_0 , допускает слабую характеристику $\bar{\varphi} = (\bar{f}_t)_{t \in E}$ такую, что $\bar{f}_T = f_T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам достаточно показать, что функционал q , определенный формулой (9.3), имеет опорный в точке x_0 . Заметим, что $q(x) = p_{a_{T,0}}(x)(f_T)$. (Мы считаем, что $f_T \in S_2^*$.)

Покажем, что q дифференцируем в точке x_0 по конусу L_{x_0} ; иными словами, для любого $u \in L_{x_0}$ существует предел

$$q'_{x_0}(u) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{q(x_0 + \alpha u) - q(x_0)}{\alpha}. \quad (9.5)$$

В самом деле, используя (9.4), имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\alpha} (q(x_0 + \alpha u) - q(x_0)) &= \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\alpha} \cdot (p_{a_{T,0}}(x_0 + \alpha u)(f_T) - p_{a_{T,0}}(x_0)(f_T)) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha p'_{a_{T,0}}(x_0, u)(f_T) + o_{x_0, u}(\alpha)) = p'_{a_{T,0}}(x_0, u)(f_T). \end{aligned}$$

Тем самым нужный нам предел существует; при этом

$$q'_{x_0}(u) = p'_{a_{T,0}}(x_0, u)(f_T). \quad (9.6)$$

Выясним теперь некоторые свойства функционала q'_{x_0} , определенного на конусе L_{x_0} формулой (9.5). Непосредственно из определения вытекает, что q'_{x_0} положительно однороден. Покажем, что этот функционал супераддитивен. В самом деле,

$$\begin{aligned} q'_{x_0}(u_1 + u_2) &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{q(x_0 + \alpha(u_1 + u_2)) - q(x_0)}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{2}{\alpha} \left(q\left(x_0 + \frac{\alpha}{2}(u_1 + u_2)\right) - q(x_0) \right) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\alpha} (q((x_0 + \alpha u_1) + (x_0 + \alpha u_2)) - 2q(x_0)) \geq \\ &\geq \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\alpha} (q(x_0 + \alpha u_1) - q(x_0)) + \\ &\quad + \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\alpha} (q(x_0 + \alpha u_2) - q(x_0)) = q'_{x_0}(u_1) + q'_{x_0}(u_2), \end{aligned}$$

откуда и следует супераддитивность этого функционала. Наконец, как непосредственно следует из (9.6) и условия теоремы, q'_{x_0} — непрерывный функционал.

Из сказанного вытекает, в частности, что функционал q'_{x_0} суперлинеен (о суперлинейности q'_{x_0} имеет смысл говорить, так как этот функционал задан на замкнутом выпуклом конусе L_{x_0}). В силу теоремы 2.1 существует линейный функционал f_0 , опорный к q'_{x_0} . Покажем, что f_0 опорен к q в точке x_0 . Пусть $u \in K_0$. Так как $K_0 \subset L_{x_0}$, то q дифференцируем по направлению u , и потому

$$q(x_0) + \alpha q(u) \leq q(x_0 + \alpha u) = q(x_0) + \alpha q'_{x_0}(u) + o_{x_0, u}(\alpha) \leq \\ \leq q(x_0) + \alpha f_0(u) + o_{x_0, u}(\alpha),$$

откуда

$$q(u) \leq f_0(u) + \frac{o_{x_0, u}(\alpha)}{\alpha}.$$

Из последнего неравенства следует, что $f_0 \in U_q$. Покажем теперь, что $f_0(x_0) = q(x_0)$. Учитывая, что $-x_0 \in L_{x_0}$, имеем

$$q'_{x_0}(-x_0) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\alpha} (q(x_0 - \alpha x_0) - q(x_0)) = -q(x_0).$$

Предполагая, что $f_0(x_0) > q(x_0)$, получим

$$f_0(-x_0) = -f_0(x_0) < -q(x_0) = q'_{x_0}(-x_0),$$

что невозможно, так как f_0 опорен к q'_{x_0} .

Мы показали, таким образом, что функционал q имеет опорный в точке x_0 , откуда и следует справедливость теоремы.

Следующие теоремы полностью описывают траектории, допускающие слабую характеристику (соответственно, характеристику).

Т е о р е м а 9.4. *Для того, чтобы траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} допускала слабую характеристику, необходимо и достаточно, чтобы нашелся функционал f из конуса K_0^* такой, что*

$$1) f(x_0) = \min_{y \in (n_{\Gamma, 0})^{-1}(x_{\Gamma})} f(y),$$

$$2) a'_{\Gamma, 0}(f) \neq \{0\}.$$

Доказательство. 1) *Достаточность.* Пусть f — функционал, фигурирующий в условии теоремы. Так

как отображение $a'_{T,0}$ суперлинейно, то (теоремы 4.1 и 4.3)

$$\max_{g \in a'_{T,0}(f)} g(x_T) = \min_{x \in (a''_{T,0})^{-1}(x_T)} f(x) = \min_{x \in (na_{T,0})^{-1}(x_T)} f(x) = f(x_0). \quad (9.7)$$

Пусть функционал \bar{f} из $a'_{T,0}(f)$ таков, что $\bar{f}(x_T) = f(x_0)$. Так как $a'_{T,0}(f) \neq \{0\}$, то можно считать, что $\bar{f} \neq 0$. Соединим точки f и \bar{f} траекторий $\bar{\varphi}$ модели \mathfrak{M} . Эта траектория является слабой характеристикой траектории χ .

2) *Необходимость.* Пусть χ допускает слабую характеристику $\bar{\varphi} = (\bar{f}_t)_{t \in E}$. Тогда если $x \in K_0$, $y \in a_{T,0}(x)$, то $\bar{f}_0(x) \geq \bar{f}_T(y)$. Таким образом, $\bar{f}_T \in a'_{T,0}(\bar{f}_0)$, и потому $a'_{T,0}(\bar{f}_0) \neq \{0\}$. Отметим еще, что $(na_{T,0})' = a'_{T,0}$. Из сказанного следует, что $\bar{f}_T \in (na_{T,0})'(\bar{f}_0)$ и, стало быть, для любого $y \in (na_{T,0})^{-1}(x_T)$

$$\bar{f}_0(y) \geq \bar{f}_T(x_T) = \bar{f}_0(x_0).$$

Таким образом,

$$\bar{f}_0(x_0) = \min_{y \in (na_{T,0})^{-1}(x_T)} \bar{f}_0(y).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Попутно мы доказали справедливость следующих утверждений:

а) если для траектории χ найдется функционал f , удовлетворяющий условиям 1) и 2) теоремы, то существует слабая характеристика этой траектории, которая является траекторией двойственной модели, исходящей из f ;

б) если траектория χ допускает слабую характеристику $\varphi = (f_t)_{t \in E}$, то функционал f_0 удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы.

Отметим еще, что в условии теоремы можно не требовать положительности функционала f . (Как следует из замечания к предложению 8.5, эта положительность автоматически вытекает из условия 1) теоремы.)

Т е о р е м а 9.5. *Для того чтобы траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} допускала характеристику, необходимо и достаточно, чтобы нашелся функционал f из конуса K_0^* такой, что*

$$f(x_0) = \min_{y \in (na_{T,0})^{-1}(x_T)} f(y) > 0.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.4.

Теорема 9.5 описывает траектории, допускающие характеристику в терминах множества $(na_{T,0})^{-1}(x_T)$. Напомним, что, согласно предложению 8.4, оптимальность траектории можно также выразить в терминах этого множества (траектория χ оптимальна в том и только том случае, когда x_0 — граничная снизу точка множества $(na_{T,0})^{-1}(x_T)$). Приведенные ниже рис. 22, 23 показывают, по каким причинам оптимальная траектория может не допускать характеристику. В ситуации, изображенной на рис. 22, характеристики не существует; на рис. 23 — существует.

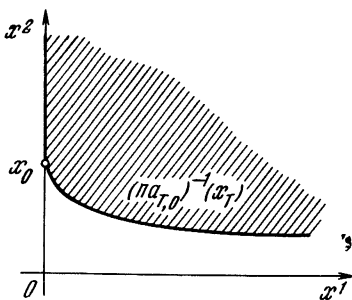


Рис. 22.

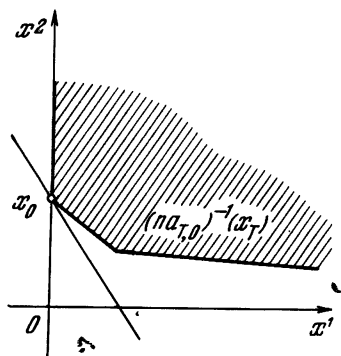


Рис. 23.

5. Характеристика траекторий модели второго рода. Предположим теперь, что модель (9.1) — второго рода.

Будем говорить, что траектория $\bar{\chi} = (\bar{x}_t)_{t \in E}$ этой модели *допускает слабую характеристику*, если найдется семейство $\bar{\varphi} = (\bar{f}_t)_{t \in E}$ ($\bar{f}_t \in K_t^*$, $t \in E$) такое, что

а) для любой траектории $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} функция $h_\chi: t \rightarrow f_t(x_t)$ ($t \in E$) убывает,

б) функция $h_{\bar{\chi}}$ постоянна,

в) $f_t \neq 0$ ($t \in E$).

Если, кроме того, $h_{\bar{\chi}} > 0$, то будем говорить, что $\bar{\chi}$ *допускает характеристику*.

Указанное семейство $\bar{\varphi}$ назовем *слабой характеристикой* (соответственно, *характеристикой*) траектории χ .

Наша цель заключается в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 9.6. Для того чтобы траектория $\bar{\chi} = (\bar{x}_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} допускала слабую характеристику, необходимо и достаточно, чтобы нашелся функционал f из конуса K_0^* такой, что

$$a) \min_{y \in (na)^{-1}(\bar{\chi})} f(y) = f(\bar{x}_0), \quad (9.8)$$

$$b) a_{t,0}(f) \neq \{0\} \quad (t \in E, t > 0). \quad (9.9)$$

(Напомним, что $(na)^{-1}(\bar{\chi}) = \bigcup_{t \in E, t > 0} (na_{t,0})^{-1}(\bar{x}_t)$.)

Доказательство. *Достаточность.* Доказательство достаточности мы проведем в два этапа.

1) Сначала рассмотрим случай, когда модель \mathfrak{M} дискретна. Не уменьшая общности, считаем, что $E = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Зафиксируем натуральное число T и рассмотрим T -кусоч $\bar{\chi}_T$ траектории $\bar{\chi}$. Семейство $\bar{\chi}_T$ можно рассматривать как траекторию модели

$$n\mathfrak{M}_T = \{E_T, (na_{\tau,t})_{(\tau,t) \in \tilde{E}_T}\},$$

где $E_T = \{0, 1, 2, \dots, T\}$.

Так как $\bar{x}_0 \in (na_{T,0})^{-1}(\bar{x}_T) \subset (na)^{-1}(\bar{\chi})$, то, используя (9.8), получим

$$\min_{y \in (na_{T,0})^{-1}(\bar{x}_T)} f(y) = f(\bar{x}_0).$$

Из теоремы 9.4 и замечания к ней теперь следует, что найдется траектория $\varphi_T = (f_t^T)_{t \in E_T}$ модели $(n\mathfrak{M}_T)' = \mathfrak{M}'_T$, исходящая из точки f и дающая слабую характеристику траектории $\bar{\chi}_T$ модели $n\mathfrak{M}_T$. В частности,

$$f(\bar{x}_0) = f_1^T(\bar{x}_1) = \dots = f_T^T(\bar{x}_T). \quad (9.10)$$

Траекторию φ_T всегда можно выбрать так, чтобы она являлась оптимальной траекторией модели \mathfrak{M}'_T . Прежде всего отметим, что эта траектория допускает слабую характеристику. Слабой характеристикой ее является, в силу (9.10), семейство $\bar{\chi}_T$.

Если сужение функционала \bar{x}_T (над пространством X_T^*) на грань Γ_T^f конуса K_T^* отлично от нуля, то φ_T допускает характеристику как траектория подмодели $(\mathfrak{M}'_T)^f$ модели \mathfrak{M}'_T и, стало быть, является слабо оптимальной

траекторией этой подмодели, т. е. оптимальной траекторией \mathfrak{M}'_T . В противном случае $f_T^T(\bar{x}_T) = f(\bar{x}_0) = 0$ и вместо семейства φ_T можно рассмотреть траекторию $\tilde{\varphi}_T$ модели \mathfrak{M}'_T , исходящую из f и приходящую в $\tilde{f}_T^T = \frac{f_T^T}{\|f_T^T\|_{a_{T,0}}(f)}$. Траектория $\tilde{\varphi}_T$ является слабой характеристикой траектории $\bar{\chi}_T$, и, кроме того (см. предложение 8.3') она оптимальна. Мы будем считать, что уже сама траектория φ_T выбрана оптимальной. Используя принцип оптимальности (теорема 8.2), получим, что

$$\|f_t^T\|_{a_{t,0}(f)} = 1 \quad (t = 1, 2, \dots, T).$$

Построим траекторию φ_T для каждого натурального T и рассмотрим последовательности

$$(f_1^T)_{T=1}^\infty, (f_2^T)_{T=2}^\infty, \dots, (f_t^T)_{T=t}^\infty, \dots$$

Каждая из этих последовательностей ограничена; более того, при любом натуральном t

$$\|f_t^T\|_{a_{t,0}(f)} = 1. \quad (9.11)$$

Применяя диагональный процесс, найдем номера $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ так, чтобы существовали пределы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_t^{T_k} = \bar{f}_t \quad (t = 1, 2, \dots).$$

Из (9.11) следует, что $\bar{f}_t \neq 0$ при всех натуральных t . Последовательность

$$\bar{\varphi} = (f, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_t, \dots)$$

является траекторией модели \mathfrak{M}' . Кроме того,

$$f(x_0) = \bar{f}_1(x_1) = \dots = \bar{f}_t(x_t) = \dots$$

Таким образом, $\bar{\varphi}$ является слабой характеристикой траектории $\bar{\chi}$ и, стало быть, $\bar{\chi}$ допускает слабую характеристику.

2) Перейдем теперь к общему случаю.

Рассмотрим конфинальное дискретное подмножество e множества E и дискретное разряжение \mathfrak{M}^e модели \mathfrak{M} . Семейство $\bar{\chi}_e = (\bar{x}_t)_{t \in e}$ является траекторией модели \mathfrak{M}^e .

Поскольку

$$na_{t,0}(x_t) \subset na_{\tau,0}(x_\tau) \quad ((\tau, t) \in E)$$

и e конфинально, то $(na)^{-1}(\bar{X}) = (na)^{-1}(\bar{X}_e)$.

Из сказанного, в частности, следует, что для траектории \bar{X}_e модели \mathfrak{M}_e выполнено условие (9.8) теоремы. Поскольку условие (9.9) также справедливо, то, используя первую часть доказательства, получим, что траектория \bar{X}_e допускает слабую характеристику. Более точно, найдется траектория $\varphi_e = (f_t)_{t \in e}$ модели $(\mathfrak{M}^e)'$ такая, что функция $h_{\bar{X}}$ постоянна. Здесь $h_{\bar{X}}(t) = f_t(x_t)$ ($t \in e$).

Нетрудно видеть, что модель $(\mathfrak{M}^e)'$ является дискретным разряжением модели \mathfrak{M}' ; иными словами, $(\mathfrak{M}^e)' = (\mathfrak{M}')^e$, а потому найдется траектория $\bar{\varphi} = (\bar{f}_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M}' такая, что $\bar{f}_t = f_t$ ($t \in e$).

Функция \bar{h} , определенная на E формулой

$$\bar{h}(t) = \bar{f}_t(x_t),$$

убывает; сужение $h_{\bar{X}}$ этой функции на e постоянно. Так как e конфинально, то и сама функция \bar{h} постоянна.

Таким образом, траектория $\bar{\varphi}$ является слабой характеристикой траектории \bar{X} , что и доказывает достаточность.

Необходимость. Пусть $\bar{\varphi} = (\bar{f}_t)_{t \in E}$ — слабая характеристика траектории \bar{X} . Тогда семейство $\bar{\varphi}_T = (\bar{f}_t)_{t \in E \cap [0, T]}$ является слабой характеристикой T -куска \bar{X}_T этой траектории ($T \in E$, $T > 0$). Из теоремы 9.4 и замечания к ней вытекает, что

$$\min_{y \in (na_T, 0)^{-1}(\bar{x}_T)} \bar{f}_0(y) = \bar{f}_0(x_0), \quad a'_{T,0}(\bar{f}_0) \neq \{0\}.$$

Ввиду произвольности T из полученных соотношений вытекают условия (9.8) и (9.9).

Теорема доказана.

Рассуждая так же, как при доказательстве этой теоремы, нетрудно показать, что имеет место

Теорема 9.7. *Для того чтобы траектория $\bar{X} = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} допускала характеристику, необходимо и достаточно, чтобы нашелся функционал f из конуса K_0^* такой, что*

$$\min_{y \in (na)^{-1}(\bar{x})} f(y) = f(x_0) > 0.$$

В некоторых случаях теорему 9.6 удобно формулировать следующим образом.

Теорема 9.6'. *Для того чтобы траектория χ модели второго рода \mathfrak{M} допускала слабую характеристику, необходимо и достаточно, чтобы T -куски этой траектории допускали слабую характеристику (как траектории модели \mathfrak{M}_T) при любом $T \in E$, $T \neq 0$.*

Достаточность условий теоремы доказывается так же, как и в теореме 9.6. Необходимость очевидна.

В качестве следствия из теоремы 9.6' приведем следующую теорему.

Теорема 9.8. *Оптимальная траектория χ модели второго рода \mathfrak{M} , исходящая из внутренней точки x_0 конуса K_0 , допускает характеристику.*

Доказательство. В силу теоремы 9.2 любой T -кусочек траектории χ допускает характеристику, и потому, как следует из теоремы 9.6, сама эта траектория допускает слабую характеристику φ . Так как $x_0 \in \text{int } K_0$, то φ является характеристикой.

Теорема доказана.

Заметим, что для траекторий, допускающих характеристику, *аналог теоремы 9.6' неверен*; иными словами, даже если каждый T -кусочек траектории допускает характеристику, сама траектория может ее не допускать. Приведем пример, подтверждающий это обстоятельство.

Пример. Рассмотрим модель

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\},$$

где E — множество неотрицательных целых чисел, $X_t = R^2$, $K_t = R_+^2$ ($t \in E$); для $t \in E$ и $x \in R_+^2$

$$a_{t+1, t}(x) = \{y \in R_+^2 \mid y^2 \leq x^2, y^2 - x^2 \leq s_t(x^1 - y^1)\}, \quad (9.12)$$

где $(s_t)_{t=0}^{\infty}$ — монотонно убывающая числовая последовательность, причем $\lim s_t = 0$. (Заметим, что отображение вида (9.12) рассматривалось ранее в п. 8 § 4 и п. 5 § 8.)

Если $(\tau, t) \in \tilde{E}$, то, по определению,

$$a_{\tau, t} = a_{\tau, \tau-1} \circ a_{\tau-1, \tau-2} \circ \dots \circ a_{t+1, t}.$$

Опишем прежде всего отображение $a_{t+1, t}^{-1}$. Имеем, используя (9.12), для $y \in R_+^2$

$$a_{t+1, t}^{-1}(y) = \{x \in R_+^2 \mid x^2 \geq y^2, x^2 - y^2 \geq s_t(y^1 - x^1)\}. \quad (9.13)$$

Нетрудно убедиться, используя формулу (9.13), что отображения $a_{t+1,t}^{-1}$ ($t \in E$) обладают следующими свойствами:

- а) $y \in a_{t+1,t}^{-1}(y) \quad (y \in R_+^2, t \in E)$;
 б) $a_{t+2,t+1}^{-1}(y) \supset a_{t+1,t}^{-1}(y) \quad (y \in R_+^2, t \in E)$;
 в) если $y \in a_{t+1,t}^{-1}(z)$, то $a_{t+1,t}^{-1}(y) \subset a_{t+1,t}^{-1}(z)$.

Из этих свойств вытекает, что для натуральных t

$$(na_{t,0})^{-1}(y) = a_{t,0}^{-1}(y) = a_{t,t-1}^{-1}(y). \quad (9.14)$$

Рассмотрим элемент \bar{x} из конуса R_+^2 :

$$\bar{x} = (1, 0).$$

В силу (9.12) последовательность $\chi = (x_t)_{t \in E}$, где $x_t = \bar{x}$ ($t = 0, 1, \dots$), является траекторией модели \mathfrak{M} . Покажем, что эта траектория не допускает характеристики. В самом деле, учитывая, что $\lim s_t = 0$, и привлекая формулы (9.13) и (9.14), получим, что множество $(na)^{-1}(\chi)$ представляет собой конус R_+^2 с вырезанным из него отрезком $\langle 0, \bar{x} \rangle$ (рис. 24), а потому не найдется ни одного линейного положительного функционала, строго отделяющего $(na)^{-1}(\chi)$ от нуля. Наше утверждение следует теперь из теоремы 9.7. С другой стороны, в силу теоремы 9.5 каждый T -кусочек этой траектории допускает характеристику. Заметим, что траектория χ допускает слабую характеристику, ею может служить, например, семейство $\varphi = (f_t)_{t \in E}$, где $f_t = (0, 1)$ ($t \in E$).

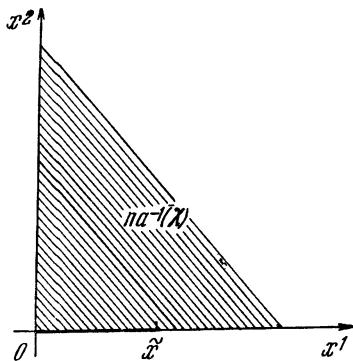


Рис. 24.

6. Согласованные траектории. Введем в рассмотрение еще один класс траекторий модели второго рода \mathfrak{M} .

Пусть $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ — траектория модели \mathfrak{M}' , двойственной к \mathfrak{M} . Траекторию $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} назовем *согласованной* с φ , если $\lim_{t \in E} f_t(x_t) > 0$ (заметим *), что указанный выше предел всегда существует и неотрицателен). Пару (χ, φ) будем называть *согласованной парой траекторий*.

*) Запись $\lim_{t \in E} f_t(x_t)$ равносильна записи $\lim_{t \rightarrow T} f_t(x_t)$, где $T = \sup E$. (Напомним, что $T \notin E$.)

Если траектория χ модели \mathfrak{M} входит в некоторую согласованную пару, то будем говорить, что эта траектория *допускает согласование*.

Имеет место

Теорема 9.9. *Для того чтобы траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} допускала согласование, необходимо и достаточно, чтобы нашелся функционал f из конуса K_0^* такой, что*

$$\inf_{x \in (na)^{-1}(\chi)} f(x) > 0.$$

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть χ допускает согласование и траектория $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M}' такова, что

$$\liminf_t f_t(x_t) = \inf_t f_t(x_t) = q > 0.$$

Учитывая, что $f_t \in a'_{t,0}(f_0)$ ($t \in E$, $t > 0$) и используя теорему 4.1 (теорему двойственности), получим, что для любого $t \in E$, $t > 0$

$$\begin{aligned} \inf_{x \in (na_{t,0})^{-1}(x_t)} f_0(x) &= \inf_{x \in (a''_{t,0})^{-1}(x_t)} f_0(x) = \\ &= \max_{f \in a'_{t,0}(f_0)} f(x_t) \geq f_t(x_t) \geq q, \end{aligned}$$

откуда

$$\inf_{x \in (na)^{-1}(\chi)} f_0(x) = \inf_{t \in E, t > 0} \inf_{x \in (na_{t,0})^{-1}(x_t)} f_0(x) \geq q,$$

что и доказывает необходимость.

2) *Достаточность.* Мы проведем доказательство достаточности, предполагая, что модель \mathfrak{M} дискретна. В общем случае вместо модели \mathfrak{M} следует рассмотреть ее дискретное разряжение и использовать те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 9.6.

Итак, считаем модель \mathfrak{M} дискретной; при этом, не умаляя общности, можно предположить, что E совпадает с множеством неотрицательных целых чисел. Пусть функционал f из конуса K_0^* таков, что

$$\inf_{x \in (na)^{-1}(\chi)} f(x) = q > 0,$$

При любом натуральном T имеем, используя теорему двойственности,

$$\begin{aligned} \max_{g \in a_{T,0}(f)} g(x_T) &= \inf_{x \in (a_{T,0})^{-1}(x_T)} f(x) = \\ &= \inf_{x \in (na_{T,0})^{-1}(x_T)} f(x) \geq \inf_{x \in (na)^{-1}(x)} f(x) = q. \end{aligned}$$

Из сказанного следует, что найдется T -траектория $\varphi_T = (f_0^T, \dots, f_T^T)$ модели \mathfrak{M}' , исходящая из точки f и такая, что

$$f_0^T(x_0) \geq f_1^T(x_1) \geq \dots \geq f_T^T(x_T) \geq q. \quad (9.15)$$

Нетрудно проверить, что последовательности $(f_t^T)_{T=t}^\infty$ ограничены, и потому, применяя диагональный процесс, можно выделить последовательность номеров $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ такую, что существуют пределы

$$\lim f_1^{T_k} = f_1, \lim f_2^{T_k} = f_2, \dots, \lim f_t^{T_k} = f_t, \dots$$

Последовательность $\varphi = (f, f_1, \dots, f_t, \dots)$ является траекторией модели \mathfrak{M}' . При этом, как следует из (9.15),

$$f_t(x_t) \geq q \quad (t \in E),$$

а потому и $\lim_{t \in E} f_t(x_t) \geq q > 0$.

Теорема доказана

З а м е ч а н и е 1. Попутно мы доказали следующие утверждения.

а) Пусть (χ, φ) — согласованная пара траекторий, причем φ исходит из f_0 . Тогда функционал f_0 обладает тем свойством, что

$$\inf_{x \in (na)^{-1}(\chi)} f_0(x) > 0. \quad (9.16)$$

б) Пусть траектория χ и функционал f_0 таковы, что выполнено (9.16). Тогда найдется траектория φ модели \mathfrak{M}' , исходящая из f_0 и образующая с траекторией χ согласованную пару.

З а м е ч а н и е 2. Легко видеть, что теорему можно сформулировать следующим образом: траектория χ допускает согласование тогда и только тогда, когда замыкание множества $(na)^{-1}(\chi)$ не совпадает с конусом K_0 .

Поскольку необходимые и достаточные условия того, что траектория χ оптимальна, допускает характеристику и слабую характеристику, допускает согласование, выражаются в терминах одного и того же множества $(na)^{-1}(\chi)$,

то можно достаточно просто сравнить между собой указанные классы траекторий.

Если траектория χ модели \mathfrak{M} допускает характеристику φ , то, как следует непосредственно из определения, χ согласована с φ . Траектория, допускающая согласование, не обязана быть оптимальной или допускать слабую характеристику. Пример, приведенный в конце предыдущего пункта, показывает, что и, наоборот, не каждая траектория, допускающая слабую характеристику или оптимальная, допускает согласование. В самом деле, оптимальная и допускающая слабую характеристику траектория χ , рассмотренная в этом примере, обладает тем свойством, что замыкание множества $(na)^{-1}(\chi)$ совпадает с конусом K_0 .

Рассмотрим теперь траекторию $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M}' . То обстоятельство, что эта траектория допускает согласование, означает, что найдется траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели $(\mathfrak{M}')' = n \mathfrak{M}$ такая, что $\lim_{t \in E} f_t(x_t) > 0$.

Покажем, что имеет место

Предложение 9.3. *Если траектория $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M}' допускает согласование, то найдется траектория χ модели \mathfrak{M} такая, что $\lim_{t \in E} f_t(x_t) > 0$.*

Доказательство. Будем считать, что модель \mathfrak{M} дискретна (в противном случае надо использовать дискретное разряжение этой модели). Так как траектория φ допускает согласование, то используя теорему двойственности и теорему 9.9, получим, что при некотором $x \in K_0$

$$\begin{aligned} \inf_{f \in (na)^{-1}(\varphi)} f(x) &= \inf_T \inf_{f \in (a_T, 0)^{-1}(f_T)} f(x) = \\ &= \inf_T \max_{y \in a_T, 0(x)} f_T(y) = c > 0. \end{aligned}$$

Из сказанного следует, что при каждом натуральном T найдется T -траектория (x, x_1^T, \dots, x_T^T) модели \mathfrak{M} такая, что

$$f_0(x) \geq f_1(x_1^T) \geq \dots \geq f_T(x_T^T) = c > 0.$$

Для завершения доказательства надо воспользоваться диагональным процессом,

З а м е ч а н и е. Пусть (χ, φ) — согласованная пара траекторий (χ — траектория модели \mathfrak{M} , φ — модели \mathfrak{M}'). Доказанное предложение позволяет нам в этой ситуации называть φ траекторией, допускающей согласование.

Пусть φ — траектория модели \mathfrak{M}' , допускающая согласование. Будем говорить, что *точка x из конуса K_0 согласована с траекторией φ* , если
$$\inf_{f \in (na)^{-1}(\varphi)} f(x) > 0.$$
 (Это определение понадобится в следующей главе.)

Из доказательства предложения 9.3 легко вытекает, что из каждой точки x , согласованной с φ , исходит траектория χ модели \mathfrak{M} , согласованная с φ . Наоборот, если пара (χ, φ) согласована и χ исходит из точки x , то эта точка согласована с φ .

Совокупность всех точек, согласованных с φ , является, как нетрудно проверить, выпуклым незамкнутым конусом, содержащим внутренность конуса K_0 .

§ 10. ХАРАКТЕРИСТИКА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В НЕКОТОРЫХ КОНКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ

В этом параграфе мы исследуем оптимальные траектории некоторых конкретных моделей экономической динамики. При этом существенно используются результаты, полученные в предыдущих двух параграфах.

1. Модель Неймана — Гейла. Рассмотрим модель Неймана — Гейла Z , определяемую производственным отображением $a: K \rightarrow \Pi (R_+^n)$ (где $K = \text{Pr}_1 Z$ — выпуклый замкнутый конус, содержащийся в R_+^n). Как уже было отмечено в § 5, *траекторией* модели Z называется последовательность $\chi = (x_t)$, удовлетворяющая соотношениям $(x_t, x_{t+1}) \in Z (t = 0, 1, \dots)$ или, что то же самое, соотношениям $x_t \in K, x_{t+1} \in a(x_t)$. Конечная последовательность $\chi_T = (x_t)_{t=0}^T$, члены которой удовлетворяют тем же соотношениям, называется *конечной* (или, точнее говоря, *T-шаговой*) *траекторией* рассматриваемой модели.

Наряду с моделью Z рассмотрим дискретную технологическую модель второго рода

$$\mathfrak{M}_Z = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_{\tau,t})_{(\tau,t) \in \tilde{E}}\}, \quad (10.1)$$

где E — множество неотрицательных целых чисел, $K_0 = K$, $K_t = \overline{a^t(K) \cap K} (t = 1, 2, \dots)$, $X_t = K_t - K_t$

($t = 0, 1, 2, \dots$); если $(\tau, t) \in E$ и $x \in K_t$, то $a_{\tau, t}(x) = a^{\tau-t}(x) \cap K$.

Отображения $a_{\tau, t}$, как нетрудно проверить, суперлинейны. Покажем, что семейство $(a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in E}$ удовлетворяет условию согласования. Пусть $t < t' < t''$. Проверим, что отображения $a_{t'', t}$ и $a_{t'', t'} \circ a_{t', t}$ совпадают на конусе $a^t(K) \cap K$. В самом деле, пусть $y \in a_{t'', t}(x)$ ($x \in a^t(K) \cap K$). Тогда $y \in a^{t''-t}(x)$, и потому найдется t'' -шаговая траектория $(x_0, x_1, \dots, x_t, \dots, x_{t'}, \dots, x_{t''})$ модели Z такая, что $x_t = x$, $x_{t'} = y$. Элемент $x_{t'}$ входит в конусы K и $a^{t'}(K)$, т. е. $x_{t'} \in K_{t'}$. Кроме того, $x_{t'} \in a^{t'-t}(x)$ и $y \in a^{t''-t'}(x_{t'})$. Это показывает, что справедливо включение $a_{t'', t}(x) \subset a_{t'', t'} \circ a_{t', t}(x)$. Подобным же образом проверяется обратное включение. Итак, суперлинейные отображения $a_{t'', t}$ и $a_{t'', t'} \circ a_{t', t}$ совпадают на конусе $a^t(K) \cap K$; отсюда следует, что они совпадают и на замыкании K_t этого конуса.

Очевидно, что пучок траекторий модели \mathfrak{M}_Z совпадает с совокупностью всех траекторий модели Z .

Для изучения конечных (T -шаговых) траекторий модели Неймана — Гейла можно привлечь дискретную модель первого рода

$$\mathfrak{M}_Z^T = \{\{0, 1, \dots, T\}, (X_t)_{t=0}^T, (K_t)_{t=0}^T, (a_{\tau, t})_{0 \leq t < \tau \leq T}\},$$

где пространства X_t , конусы K_t ($t < T$) и отображения $a_{\tau, t}$ ($t < \tau < T$) таковы же, что и в модели (10.1):

$$K_T = a^T(K), X_T = K_T - K_T, a_{T, t} = a^{T-t}.$$

Сказанное позволяет естественным образом определить в модели Неймана — Гейла те объекты, которые рассматривались в технологических моделях. В частности, будем говорить, что траектория (конечная траектория) модели Z обладает каким-либо свойством (оптимальностью, допускает характеристику и т. д.), если она обладает этим свойством, как траектория модели \mathfrak{M}_Z (модели \mathfrak{M}_Z^T). Эти определения согласованы в том смысле, что если T -кусочек траектории χ модели Z обладает одним из рассматриваемых свойств в смысле модели \mathfrak{M}_Z , то он обладает этим свойством и в смысле \mathfrak{M}_Z^T . Все результаты первых двух параграфов этой главы, относящиеся к технологическим моделям, справедливы и для модели Z . (Формулируются

они в терминах модели \mathfrak{M}_Z (или \mathfrak{M}_Z^T); поскольку, однако, связь между производственными отображениями моделей Z и \mathfrak{M}_Z достаточно проста, эти результаты нетрудно перевести на язык модели Z .)

Отметим, в частности, что из каждой точки x конуса K исходят оптимальные траектории (см. лемму 8.1). Если $x \in \text{int } K$, то каждая оптимальная траектория, исходящая из x , допускает характеристику (см. теорему 9.8). В случае, когда Z — модель Неймана, последний результат может быть существенно усилен.

Т е о р е м а 10.1. Пусть Z — модель Неймана и точка $x \in K$ такова, что при всех натуральных t множество $a^t(x)$ пересекается с K и $a^t(x) \cap K \neq \{0\}$. Тогда каждая конечная оптимальная траектория, исходящая из точки x , допускает характеристику; каждая оптимальная траектория, исходящая из x , допускает слабую характеристику.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как Z — многогранный конус, то конус Z^T — график отображения a^T ($T = 1, 2, \dots$) — также многогранен. Непосредственно из определения следует, что график $Z_{T,0}$ производственного отображения $a_{T,0}$ модели \mathfrak{M}_Z^T имеет вид $Z_{T,0} = Z^T \cap (K \times R_+^n)$. Из многогранности Z следует, что конус $K = \text{Pr}_1 Z$ многогранен, а потому и конус $Z_{T,0}$ многогранен. Из многогранности $Z_{T,0}$ следует в свою очередь что конус $a^T(K) = \text{Pr}_2 Z_{T,0}$ многогранен. Это означает, что конус K_T , фигурирующий в определении модели \mathfrak{M}_Z^T , — многогранен. Используя, наконец, то обстоятельство, что график $nZ_{T,0}$ отображения $na_{T,0}$ выражается через $Z_{T,0}$ по формуле

$$nZ_{T,0} = (Z_{T,0} - (\{0\} \times K_T)) \cap (K \times K_T),$$

получим, что и конус $nZ_{T,0}$ многогранен.

Рассмотрим теперь оптимальную T -шаговую траекторию $\chi = (x_t)_{t=0}^T$, исходящую из точки x . Поскольку конус $nZ_{T,0}$ многогранен, то и множество $(na_{T,0})^{-1}(x_T) = \{\tilde{x} \in K \mid (\tilde{x}, x_T) \in nZ_{T,0}\}$ многогранно. Используя оптимальность χ и то обстоятельство, что $a_{T,0}(x) \neq \{0\}$, получим, привлекая предложение 8.4, что x — граничный снизу элемент множества $(na_{T,0})^{-1}(x_T)$.

Из сказанного следует, что выпуклое множество $(\lambda x)_{\lambda \in (0,1)}$ не пересекается с многогранным множеством $(na_{T,0})^{-1}(x_T)$, и потому, используя теорему отделимости, найдем функционал f такой, что при $\lambda \in (0, 1)$

$$f(\lambda x) < c = \min_{y \in (na_{T,0})^{-1}(x_T)} f(y). \quad (10.2)$$

Из замечания к предложению 8.5 вытекает, что $f \in K_0^*$. Так как $x \in (na_{T,0})^{-1}(x_T)$, то, используя (10.2), имеем

$$f(x) \geq c > f(\lambda x) \geq 0. \quad (10.3)$$

Кроме того, снова привлекая (10.2), получим

$$f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 1-0} f(\lambda x) \leq c. \quad (10.4)$$

Из (10.3) и (10.4) вытекает, что

$$0 < f(x) = c = \min_{y \in (na_{T,0})^{-1}(x_T)} f(y).$$

Таким образом, траектория χ удовлетворяет необходимому и достаточному условию характеристики (теореме 9.5) и, стало быть, допускает характеристику.

Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь χ — оптимальная траектория модели Z . Рассматривая χ как траекторию модели \mathfrak{M}_Z , нетрудно установить, рассуждая так же, как при доказательстве первой части, что каждый T -кусочек χ допускает характеристику. Для завершения доказательства осталось сослаться на теорему 9.6'.

2. R_+^n -оптимальные траектории. Среди T -шаговых траекторий $\chi_T = (x_t)_{t=0}^T$ модели Неймана — Гейла Z наибольший интерес с экономической точки зрения представляют те, для которых существует функционал $f \in (R_+^n)^*$ такой, что

$$f(x_T) = \max_{y \in a_{T,0}(x_0)} f(y). \quad (10.5)$$

Эти траектории будем называть *слабо R_+^n -оптимальными*. Если, кроме того, хотя бы при одном f , удовлетворяющем равенству (10.5), выполняется неравенство $f(x_T) > 0$, то траекторию χ назовем *R_+^n -оптимальной*. Интерес к

этим траекториям вызван тем, что именно функционал f из $(R_+^n)^*$ уместно трактовать как цены (при этом координата f^i функционала f интерпретируется как цена единицы i -го «продукта»). Очевидно, что слабо R_+^n -оптимальная траектория χ слабо оптимальна. Если, кроме того, $f(x_T) > 0$, то эта траектория оптимальна.

К сожалению, для R_+^n -оптимальных T -траекторий не всегда выполняется принцип оптимальности, т. е. t -кусочек R_+^n -оптимальной траектории не обязан быть R_+^n -оптимальным. Приведем пример, подтверждающий это обстоятельство.

Пример. В пространстве R^2 рассмотрим конус

$$K = \{x \in R_+^2 \mid x^2 \geq x^1\}$$

и множество

$$\xi = \{x \in R_+^2 \mid x^1 \leq 2, 2x^2 \leq x^1 + 2\}$$

(рис. 25).

Рассмотрим модель Неймана — Гейла Z , определяемую производственным отображением $a: K \rightarrow \Pi(R_+^2)$, где $a(x) = (x^2 - x^1)\xi$. Отображение a суперлинейно; оно аддитивно (т. е. $a(x_1 + x_2) = a(x_1) + a(x_2)$); нетрудно проверить, что конус Z многогранен и, стало быть, Z — модель Неймана.

Исследуем 2-шаговые траектории модели Z . С этой целью построим модель \mathfrak{M}_Z^2 . Поскольку $a(K) = R_+^2$, то

$$\mathfrak{M}_Z^2 = \{\{0, 1, 2\}, (X_t)_{t=0,1,2}, (K_t)_{t=0,1,2}, (a_{\tau,t})_{0 \leq t < \tau \leq 2}\},$$

где $X_0 = X_1 = X_2 = R^2$, $K_0 = K_1 = K$, $K_2 = R_+^2$,

$$a_{1,0}(x) = a(x) \cap K, \quad a_{2,1}(x) = a(x), \quad a_{2,0} = a^2(x).$$

Положим $x_0 = (1, 2)$. Тогда $a(x_0) = \xi$, $a^2(x_0) = \bigcup_{x \in \xi} (x^2 - x^1)\xi = \xi$.

Каждая R_+^2 -оптимальная 2-шаговая траектория χ_2 , исходящая из точки x_0 , имеет вид $\chi_2 = (x_0, x_1, x_2)$, где $x_1 = (0, 1)$, $x_2 = (2, \lambda)$, причем $0 \leq \lambda \leq 2$; 1-кусочек $\chi_1 = (x_0, x_1)$ траектории χ_2 оптимален, но не R_+^2 -оптимален.

Этот пример показывает также, что R_+^n -оптимальная траектория не всегда допускает характеристику

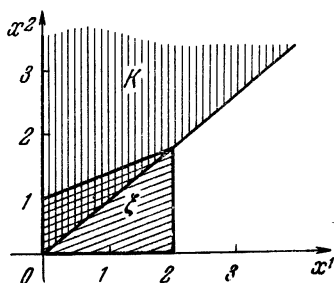


Рис. 25.

$\varphi = (f_t)_{t=0}^T$ такую, что $f_t \in (R_+^n)^*$. Действительно, траектория χ_2 , рассмотренная в примере, исходит из внутренней точки конуса X и потому допускает характеристику $\varphi = (f_0, f_1, f_2)$. При этом функционал f_1 обладает тем свойством, что $f_1(x_1) = \max_{y \in \xi} f_1(y)$. Все функционалы, обладающие

этим свойством, не принадлежат конусу $(R_+^2)^*$.

Представляет интерес описать те модели Неймана — Гейла, в которых R_+^n -оптимальные T -траектории обладают «хорошими» свойствами. Одна из этих моделей рассматривается в следующем пункте.

3. **Правильная модель Неймана — Гейла.** Модель Неймана — Гейла назовем *правильной*, если конус $K = \text{Pr}_1 Z$ совпадает с R_+^n . Наряду с моделью (10.1) для изучения траектории правильной модели можно использовать модель

$$\mathfrak{R}_Z = \{E, (X_t^{(1)})_{t \in E}, (K_t^{(1)})_{t \in E}, (a_{\tau,t}^{(1)})_{(\tau,t) \in \tilde{E}}\},$$

где, как и раньше, $E = \{0, 1, 2, \dots\}$, $X_t^{(1)} = R^n$, $K_t^{(1)} = R_+^n$ ($t \in E$), $a_{\tau,t}^{(1)} = a^{\tau-t}$ ($\tau, t \in \tilde{E}$). Очевидно, что \mathfrak{R}_Z — правильная конечномерная модель второго рода, пучок траекторий которой совпадает с совокупностью всех траекторий модели Z . Из предложения 8.6 следует, что T -траектория $\chi = (x_t)_{t=0}^T$ модели \mathfrak{R}_Z , исходящая из точки x такой, что $a^T(x) \neq \{0\}$, является оптимальной T -траекторией этой модели тогда и только тогда, когда χ R_+^n -оптимальна, как T -шаговая траектория модели Z . Это простое замечание позволяет легко установить справедливость следующих утверждений.

1) Для R_+^n -оптимальных T -шаговых траекторий правильной модели Неймана — Гейла Z выполнен принцип оптимальности.

2) Из каждой точки x конуса R_+^n исходит R_+^n -оптимальная траектория модели Z (т. е. траектория, обладающая тем свойством, что каждый ее T -кусочек R_+^n -оптимален).

3) Если R_+^n -оптимальная траектория χ исходит из внутренней точки x конуса R_+^n , то она допускает характеристику $\varphi = (f_t)$ такую, что $f_t \in (R_+^n)^*$.

4) Если Z — модель Неймана, то каждая R_+^n -оптимальная траектория χ , исходящая из точки x , для которой $a'(x) \neq \{0\}$ при всех $t \neq 0$, допускает слабую характеристику $\varphi = (f_t)$ такую, что $f_t \in (R_+^n)^*$; каждая R_+^n -оптимальная T -шаговая траектория, исходящая из x , допускает характеристику, обладающую тем же свойством.

4. Модель типа Неймана — Гейла. Рассмотрим динамическую модель нестационарной экономики, функционирующую в дискретном времени, которая называется *моделью типа Неймана — Гейла*. Она определяется как последовательность выпуклых замкнутых конусов $(Z_t)_{t=0}^\infty$, где $Z_t \subset R_+^{n_t} \times R_+^{n_{t+1}}$, $(0, y) \notin Z_t$ при $y \neq 0$ и $\text{Pr}_2 Z_t \cap \cap \text{int } R_+^{n_{t+1}} \neq \emptyset$. (Иногда под моделью типа Неймана — Гейла понимают модель, определяемую лишь конечным числом конусов (см. § 5); эта модель, однако, очевидным образом вкладывается в определенную выше, и мы ее отдельно не рассматриваем.) *Траекторией модели Неймана — Гейла* называется последовательность $\chi = (x_t)$ такая, что $(x_t, x_{t+1}) \in Z_t$ ($t = 0, 1, \dots$). Нетрудно построить, подобно тому, как это было сделано в п. 1, технологическую модель второго рода, пучок траекторий которой совпадает с совокупностью всех траекторий рассматриваемой модели. Если $\text{Pr}_1 Z_t = R_+^{n_t}$, т. е. модель типа Неймана — Гейла правильна, то для ее изучения можно использовать правильную технологическую модель второго рода, построенную так же, как и в п. 3.

Модель Неймана — Гейла является частным случаем модели типа Неймана — Гейла (в этом случае последовательность (Z_t) постоянна). Исследуя траектории модели Неймана — Гейла, мы по существу нигде не использовали ее специфику (т. е. постоянство последовательности (Z_t)), поэтому все результаты пп. 1—3 верны с естественными оговорками и для случая модели типа Неймана — Гейла.

5. Модель, функционирующая в непрерывном времени. Траектории рассматриваемой модели определяются с помощью дифференциального включения вида $\dot{x} \in a(x) - x$. Покажем прежде всего правомерность такого определения с помощью предельного перехода для последовательности моделей с дискретным временем, когда временной интервал между двумя смежными моментами стремится к нулю.

Рассмотрим модель Неймана — Гейла, задаваемую конусом Z или соответствующим ему отображением a . Согласно экономической интерпретации модели, изложенной в § 5, вектор $(x, y) \in Z$ представляет собой процесс переработки набора «продуктов» x в набор y за единицу времени.

Предположим, что этот процесс переработки продуктов во времени происходит равномерно, т. е., например, за половину единичного временного интервала перерабатывается только половина набора x в y , а другая половина остается неизменной.

Иначе говоря, если единичный временной интервал уменьшить в два раза, то набор x перерабатывается в набор $x/2 + y/2$. В случае, когда в качестве единичного интервала взята $1/m$ часть первоначального интервала, из набора x делается набор $\frac{m-1}{m}x + \frac{1}{m}y$.

Таким образом, если имеется набор $x(t)$, то возможные «приращения» набора x за время $1/m$, отнесенные к этому промежутку времени, определяются соотношением

$$\frac{x\left(t + \frac{1}{m}\right) - x(t)}{1/m} = \frac{\frac{m-1}{m}x(t) + \frac{1}{m}y - x(t)}{1/m} = y - x(t),$$

где $(x(t), y) \in Z$.

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем $\dot{x} = y - x$, где $(x, y) \in Z$ или, что то же самое, $\dot{x} \in a(x) - x$.

Дадим теперь точное определение модели с непрерывным временем. Нам будет удобно считать здесь, что в пространстве R^n норма введена следующим образом: $\|x\| = \sum |x^i|$. Рассмотрим промежуток $[0, T]$ и каждому $t \in [0, T]$ поставим в соответствие отображение $a_t \in A(R_+, R_+)$ и линейный оператор $B_t: R^n \rightarrow R^n$. Считаем, что почти при всех t

$$\|a_t\| + \|B_t\| \leq C < \infty. \quad (10.6)$$

Модель экономики, функционирующую в непрерывном времени, можно задать с помощью дифференциального включения

$$\dot{u} \in a_t(u) - B_t u \quad (t \in [0, T]). \quad (10.7)$$

Траекторией включения (10.7) на промежутке $[t', t'']$

назовем абсолютно непрерывную функцию u , определенную на этом промежутке и такую, что *) $u(t) \geq 0$, $\dot{u}(t) \in \in a_t(u(t)) - B_t u(t)$ почти при всех t . Вместо выражения «траектория на промежутке $[0, T]$ » будем употреблять слово «траектория». В дальнейшем считаем, что выполнено следующее условие:

(*) если $x \in R_+^n$ и $0 \leq t' < t'' \leq T$, то из точки x исходит траектория дифференциального включения (10.7) на промежутке $[t', t'']$.

З а м е ч а н и е. Можно показать (Кастайн [1]), что при некоторых естественных предположениях относительно функции $F: t \rightarrow \rightarrow a_t + B_t$, для каждой точки $t' \in [0, T]$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что траектория семейства (10.7) на промежутке $[t', t' + \varepsilon]$ существует

При изучении траекторий нам понадобится

Л е м м а 10.1. Пусть u — траектория включения (10.7) на промежутке $[t', t'']$. Тогда

$$\|u(t)\| \leq \|u(t')\| e^{C(t-t')} \quad (t \in [t', t'']),$$

где C — константа, фигурирующая в (10.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $y(t) = \|u(t)\| = = \sum_{i=1}^n u^i(t)$. Используя (10.6), имеем

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{u}^i(t) \leq \|\dot{u}(t)\| \leq C \|u(t)\| = Cy(t).$$

Пусть $v(t) = Cy(t) - \dot{y}(t)$. Тогда функция y является решением линейного дифференциального уравнения

$$\dot{y} = Cy - v \quad (10.8)$$

при начальном условии $y(t') = \|u(t')\|$. Решая уравнение (10.8), получим, что

$$y(t) = e^{C(t-t')} \left(\|u(t')\| - \int_{t'}^t e^{C(t'-\tau)} v(\tau) d\tau \right).$$

*) Из абсолютной непрерывности функции $u(t)$ вытекает, что каждая ее координата $u^i(t)$ имеет почти всюду суммируемую производную $\dot{u}^i(t)$. Под $\dot{u}(t)$ понимается вектор-функция $(\dot{u}^1(t), \dot{u}^2(t), \dots, \dot{u}^n(t))$.

Поскольку $v(\tau) \geq 0$ ($\tau \in [t', t'']$), то $y(t) \leq \|u(t')\| e^{C(t-t')}$. Лемма доказана.

Каждая траектория u включения (10.7) на промежутке $[t', t'']$ полностью определяется элементом $u(t')$ конуса R_+^n и измеримой функцией \dot{u} . Из леммы 10.1 и формулы (10.6) вытекает, что для $t \in [t', t'']$

$$\|\dot{u}(t)\| \leq C \|u(t)\| \leq C \|u(t')\| e^{C(t''-t')}, \quad (10.9)$$

откуда следует, в частности, что \dot{u} принадлежит пространству L_n^2 вектор-функций, определенных на $[t', t'']$ и суммируемых там с квадратом.

Через Ω обозначим подмножество пространства $R^n \times L_n^2$, состоящее из всех элементов вида $(u(t'), \dot{u})$, где u — траектория включения (10.7) на промежутке $[t', t'']$. (Иными словами, пара (x, z) входит в Ω тогда и только тогда, когда функция u :

$$u(t) = x + \int_{t'}^t z(\tau) d\tau \quad (t \in [t', t'']),$$

является траекторией на $[t', t'']$.)

Л е м м а 10.2. *Множество Ω , определенное выше, является выпуклым замкнутым конусом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. То обстоятельство, что Ω — выпуклый конус, вытекает непосредственно из определения этого множества, вогнутости и положительной однородности отображений a_t и линейности операторов B_t ($t' \leq t \leq t''$).

Покажем, что Ω замкнуто. В самом деле, пусть $((x_i, z_i))$ — последовательность элементов этого множества и $(x_i, z_i) \rightarrow (x, z)$. Так как (z_i) сходится к z в пространстве L_n^2 , то по известной теореме Рисса (см., например, Натансон [1]) из последовательности (z_i) можно выбрать подпоследовательность (z_{i_l}) , стремящуюся к z почти всюду. Пусть точка $t \in [t', t'']$ такова, что $z_{i_l}(t) \rightarrow z(t)$.

Положим

$$u_{i_l}(t) = x_{i_l} + \int_{t'}^t z_{i_l}(\tau) d\tau, \quad u(t) = x + \int_{t'}^t z(\tau) d\tau.$$

Из определения следует, что $u_{i_l}(t) \rightarrow u(t)$, откуда вытекает, в частности, неравенство $u(t) \geq 0$. Считаем, далее, что точка t обладает тем свойством, что при всех l

$$z_{i_l}(t) \in a_t(u_{i_l}(t)) - B_t u_{i_l}(t).$$

Множество таких точек имеет полную меру.

Из замкнутости отображений a_t теперь следует справедливость соотношения

$$z(t) \in a_t(u(t)) - B_t u(t). \tag{10.10}$$

Таким образом, функция u :

$$u(t) = x + \int_{t'}^t z(\tau) d\tau,$$

почти при всех t удовлетворяет включению (10.10). Так как $z = \dot{u}$ и кроме того, $u(t) \geq 0$ при всех t , то эта функция является траекторией включения (10.7) на промежутке $[t', t'']$. Тем самым замкнутость множества Ω доказана.

С л е д с т в и е. *Выпуклый конус Ω слабо замкнут.*

Пусть $f \in (R_+^n)^*$. Траекторию u включения (10.7) назовем *оптимальной* (в смысле f), если $f(u(T)) > 0$ и $f(u(T)) \geq f(y(T))$ для любой траектории y этого включения, исходящей из точки $u(0)$.

Для изучения оптимальных траекторий дифференциального включения рассмотрим технологическую модель

$$\mathfrak{M} = \{[0, T], (X_t)_{0 \leq t \leq T}, (K_t)_{0 \leq t \leq T}, (a_{t'', t'})_{0 \leq t' < t'' \leq T}\}. \tag{10.11}$$

Здесь X_t есть подпространство пространства R^n , натянутое на орты с номерами из множества I_t , которое определяется так: $i \in I_t$ тогда и только тогда, когда найдется траектория u включения (10.7) такая, что $u^i(t) > 0$ ($0 \leq t \leq T$), $K_t = R_+^n \cap X_t$ ($0 \leq t \leq T$); отображение $a_{t'', t'}$ определено следующим образом: точка x'' входит в $a_{t'', t'}(x')$ тогда и только тогда, когда $x'' \in K_{t''}$ и найдется траектория u включения (10.7) на промежутке $[t', t'']$ такая, что $u(t') = x'$, $u(t'') = x''$.

Проверим, что объект (10.11) действительно является технологической моделью. Покажем сначала, что $a_{t'', t'} \in A(K_{t'}, K_{t''})$.

1) Для любого $x \in K_{t'}$ множество $a_{t'', t'}(x)$ непусто; это следует из условия (*). Кроме того, $a_{t'', t'}(x') \subset K_{t''}$.

2) Отображение $a_{t'', t'}$ вогнуто и положительно однородно; справедливость этих утверждений следует из суперлинейности отображений a_t и линейности операторов B_t .

3) $a_{t'', t'}$ — гейловское отображение; действительно, если u — траектория включения (10.7) на промежутке $[t', t'']$ и $u(t') = 0$, то, как следует из леммы 10.1, $u(t'') = 0$.

4) $a_{t'', t'}$ — замкнуто.

Пусть $x_k \in K_{t'}$, $x_k \rightarrow x$, $y_k \in a_{t'', t'}(x_k)$, $y_k \rightarrow y$. Найдем траектории u_k включения (10.7) на отрезке $[t', t'']$ такие, что $u_k(t') = x_k$, $u_k(t'') = y_k$. Из формулы (10.9) легко следует ограниченность последовательности (u_k) в пространстве L_n^2 , стало быть, из этой последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность \dot{u}_{k_l} . Пусть $\lim \dot{u}_{k_l} = z$. Тогда последовательность $((x_{k_l}, \dot{u}_{k_l}))$ слабо сходится в пространстве $R^n \times L_n^2$ к элементу (x, z) . Следствие из леммы 10.2 показывает, что функция u :

$$u(t) = x + \int_{t'}^t z(\tau) d\tau \quad (t \in [t', t'']),$$

является траекторией включения (10.7) на $[t', t'']$. Так как $((x_{k_l}, \dot{u}_{k_l})) \rightarrow ((x, z))$ в смысле слабой сходимости, то

$$y_{k_l} = x_{k_l} + \int_{t'}^{t''} \dot{u}_{k_l}(\bar{\tau}) d\bar{\tau} \rightarrow x + \int_{t'}^{t''} z(\tau) d\tau;$$

т. е. $y_{k_l} \rightarrow y$. Мы показали, что $y \in a_{t'', t'}(x)$; тем самым замкнутость отображения $a_{t'', t'}$ доказана.

5) $a_{t'', t'}(K_{t'}) \cap \text{int } K_{t''} \neq \emptyset$.

Действительно, из определения пространства $X_{t''}$ легко следует, что для каждого $i \in I_{t''}$ найдется траектория u_i включения (10.7) на $[t', t'']$ такая, что $u_i^t(t'') > 0$. Траектория $u = \sum_i u_i$ этого включения на $[t', t'']$ обладает тем свойством, что $u(t'') \in \text{int } K_{t''}$.

Мы проверили таким образом, что $a_{t'', t'} \in A(K_{t'}, K_{t''})$. Непосредственно из определения вытекает, что семейство $(a_{t'', t'})_{0 \leq t' < t'' < T}$ удовлетворяет условию согласования. Это и означает, что объект (10.11) является технологической моделью.

Каждая траектория включения (10.7) является траекторией модели \mathfrak{M} . Обратное, к сожалению, не имеет места (ибо траектория модели \mathfrak{M} не обязана быть абсолютно непрерывной (и даже непрерывной) функцией). Тем не менее имеет место

Теорема 10.2. 1) Пусть точка $x \in R_+^n$ такова, что $a_{T, 0}(x) \neq \{0\}$. Тогда из этой точки исходит оптимальная траектория включения (10.7).

2) Каждая оптимальная траектория этого включения является оптимальной траекторией модели \mathfrak{M} .

Доказательство. Пусть функционал $f \in (R_+^n)^*$ таков, что $\max_{y \in a_{T,0}(x)} f(y) > 0$. Найдем точку $\tilde{y} \in a_{T,0}(x)$, в которой достигается написанный выше максимум. По определению множества $a_{T,0}(x)$, найдется траектория u включения (10.7), для которой $u(T) = \tilde{y}$. Ясно, что u — оптимальная траектория включения (10.7). Мы доказали первую часть теоремы. Заметим теперь, что модель \mathfrak{M} правильна, и потому (см. предложение 8.6) траектория $\chi = (x_t)_{0 \leq t \leq T}$ этой модели оптимальна тогда и только тогда, когда найдется функционал \tilde{f} , определенный на пространстве X_T , положительный на конусе K_T и такой, что

$$\tilde{f}(x_T) = \max_{y \in a_{T,0}(x)} \tilde{f}(y) > 0.$$

Функционал \tilde{f} очевидным образом допускает распространение до функционала $f \in (R_+^n)^*$. Отсюда и следует вторая часть теоремы.

Следствие. Для оптимальных траекторий включения (10.7) верен принцип оптимальности (иными словами, если u — оптимальная траектория включения (10.7), то при любом $t \in [0, T]$ найдется функционал $f \in (R_+^n)^*$ такой, что $f(u(t)) > 0$ и $f(u(t)) \geq f(v(t))$ для любой траектории v включения (10.7) на промежутке $[0, t]$).

С помощью модели \mathfrak{M} для оптимальных траекторий включения (10.7) можно доказать следующую теорему о характеристике.

Теорема 10.3. Пусть $x \geq 0$, $f \in (R_+^n)^*$ и u — траектория включения (10.7), исходящая из точки x и оптимальная в смысле f . Тогда найдется функция $g: [0, T] \rightarrow (R_+^n)^*$ такая, что

а) для любой траектории u включения (10.7)

$$\frac{d}{dt} g(t)(u(t)) \leq 0 \text{ почти для всех } t \in [0, T],$$

б) $\frac{d}{dt} g(t)(u(t)) = 0$ для всех $t \in [0, T]$,

в) $g(t) \neq 0$ ($t \in [0, T]$), $g(T) = f$.

Доказательство. Из теоремы 9.2 следует, что существует функция $g: [0, T] \rightarrow (R_+^n)^*$ такая, что а) функция $h_u: t \rightarrow g(t)(u(t))$ убывает для любой траектории u

включения (10.7), б) функция h_u^- постоянна, в) $g(T) = f$, $g(t) \neq 0$ ($t \in [0, T]$). Так как функция h_u монотонна, то она почти всюду на $[0, T]$ дифференцируема, причем ее производная неположительна во всех точках, в которых она существует; кроме того, $h_u'(\tau) = 0$ для всех $\tau \in [0, T]$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Дифференциальное включение (10.7) можно рассматривать как некоторый аналог задачи оптимального управления. При этом теорема 10.3 играет роль принципа максимума Л. С. Понтрягина, а функция $H(g, u)$:

$$H(g, u)(t) = \frac{d}{dt} g(t) u(t),$$

— роль гамильтониана, участвующего в формулировке этого принципа.

З а м е ч а н и е 2. Пусть отображения a_t и операторы B_t ($t \in [0, T]$) обладают тем свойством, что $B_t x \in a_t(x)$ при любом $x \in R^n$. Тогда функция g , фигурирующая в теореме, почти всюду дифференцируема и $\frac{d}{dt} g \leq 0$ почти при всех t . Для доказательства достаточно заметить, что функция $x_i : t \rightarrow e_i$, где $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ($i = 1, \dots, n$) является траекторией включения (10.7). Отметим еще, что при сделанном предположении включение (10.7) удовлетворяет условию (*).

§ 11. ОБОБЩЕННАЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

1. Определение модели. Оптимальные траектории. *Обобщенной технологической моделью* будем называть объект

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_{\tau, t})_{\tau, t \in \tilde{E}}\}, \quad (11.1)$$

где множество индексов E , пространства X_t и конусы K_t ($t \in E$) таковы же, что и в технологической модели, $a_{\tau, t}$ — отображение конуса K_t в $\Pi(K_\tau)$, обладающее всеми свойствами суперлинейного, кроме, может быть, положительной однородности. Считаем, что семейство $(a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}$ удовлетворяет условию согласования (8.1). В дальнейшем будем рассматривать только обобщенные модели первого рода (иными словами, считаем, что $\sup E = T \in E$). *Траекторией* обобщенной модели (11.1) назовем семейство $\chi = (x_t)_{t \in E}$ такое, что $x_t \in K_t$ ($t \in E$), $x_\tau \in a_{\tau, t}(x_t)$ ($(\tau, t) \in E$). Теорема 8.1 (о существовании траекторий технологической модели) остается

справедливой и в нашем случае, ибо при доказательстве этой теоремы положительная однородность отображений $a_{\tau,t}$ не использовалась.

Понятие оптимальной траектории можно ввести в обобщенной модели таким же образом, как и в обычной. Для этого следует прежде всего определить подмодель обобщенной модели \mathfrak{M} , порожденную точкой x из K_0 . Это можно сделать точно таким же способом, как и в п. 4 § 8. Все результаты этого пункта остаются (с естественными оговорками) справедливыми и в рассматриваемой ситуации; при этом вместо положительной однородности отображений $a_{\tau,t}$ следует использовать включение $a_{\tau,t}(\lambda x) \supset \supset \lambda a_{\tau,t}(x)$, справедливое при $\lambda \in (0, 1)$ и $x \in K_t$ в силу предложения 4.1. Заметим еще, что при доказательстве предложения 8.3 (и, стало быть, предложения 8.3') положительная однородность отображений $a_{\tau,t}$ не использовалась; поэтому определение оптимальности в обобщенной модели можно сформулировать следующим образом: траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели (11.1), исходящая из точки x такой, что $a_{T,0}(x) \neq \{0\}$, называется *оптимальной*, если $\|x_T\|_{na_{T,0}(x)} = 1$. (Из предложения 4.6 следует, что множество $a_{T,0}(x)$ — выпуклый компакт, и потому имеет смысл говорить о его нормальной оболочке. Как показывают приведенные выше рассуждения, данное определение согласуется с определением оптимальности в обычной модели.)

Доказательство предложения 8.4, утверждающего, что траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ технологической модели оптимальна тогда и только тогда, когда x_0 является граничной снизу точкой множества $(na_{T,0})^{-1}(x_T)$, существенно использует положительную однородность отображения $a_{T,0}$ и потому в нашем случае теряет свою силу. Приведенный ниже пример показывает, в частности, что для траекторий обобщенной модели это предложение, вообще говоря, неверно.

В свою очередь при доказательстве принципа оптимальности для технологической модели (теоремы 8.2) использовалось лишь предложение 8.4, откуда следует, что и это доказательство теряет свою силу в рассматриваемой ситуации. Приведем пример, показывающий, что для оптимальных траекторий обобщенной модели принцип оптимальности, вообще говоря, неверен.

Пример. Рассмотрим обобщенную модель

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\},$$

где $E = \{0, 1, 2\}$, $X_0 = X_1 = X_2 = R^2$, $K_0 = K_1 = K_2 = R_+^2$.

Для $x \in R_+^2$ положим

$$a_{1,0}(x) = \{z \in R_+^2 \mid z \leq x\}, \quad a_{2,1}(x) = b(x) + x^2 \xi,$$

где

$$b(x) = \begin{cases} \{z \in K \mid z^1 \leq x^1, z^2 = 0\}, & \text{если } x^1 \leq 1, \\ \{z \in K \mid z^1 \leq 1, z^2 = 0\}, & \text{если } x^1 \geq 1, \end{cases}$$

а через ξ обозначен квадрат с вершинами в точках $(0, 0)$; $(1, 0)$; $(1, 1)$; $(0, 1)$. Положим также

$$a_{2,0}(x) = a_{2,1}(x) = a_{2,1} \circ a_{1,0}(x) \quad (x \in R_+^2).$$

Нетрудно проверить, что отображения $a_{1,0}$ и $a_{2,1}$ вогнуты, замкнуты, и являются гейловскими. Кроме того, $a_{1,0}(R_+^2) = a_{2,0}(R_+^2) = R_+^2$. Из сказанного следует, в частности, что \mathfrak{M} — обобщенная технологическая модель.

Рассмотрим точку $x = (2, 0)$ из конуса R_+^2 и траекторию $\chi = (x_0, x_1, x_2)$ ($x_0 = (2, 0)$, $x_1 = x_2 = (1, 0)$) модели \mathfrak{M} , исходящую из точки x . Имеем

$$\|x_2\|_{a_{2,0}(x_0)} = 1, \quad \|x_1\|_{a_{1,0}(x_0)} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, для траектории χ не выполняется принцип оптимальности.

2. Принцип оптимальности. Наша ближайшая цель заключается в том, чтобы выяснить условия, при которых можно гарантировать выполнение принципа оптимальности. Предварительно введем одно определение. Если $a: K_1 \rightarrow \Pi(K_2)$ вогнутое, замкнутое, гейловское отображение, то отображение na , определенное формулой $na(x) = n(a(x))$, назовем *нормальной оболочкой* a . (Из предложения 4.6 следует, что множество $a(x)$ — выпуклый компакт, поэтому данное определение имеет смысл; если a суперлинейно, это определение совпадает с приведенным ранее (см. п. 6 § 4).) Отображение na является гейловским. Из ограниченности a (см. предложение 4.6) легко вытекает замкнутость na . Покажем, что na — вогнутое отображение. В самом деле, если $x_1, x_2 \in K_1$, $\alpha + \beta =$

$= 1$, $\alpha, \beta \geq 0$, то

$$n\alpha(\alpha x_1 + \beta x_2) \supset n(\alpha\alpha(x_1) + \beta\alpha(x_2)) \supset n(\alpha\alpha(x_1)) + \\ + n(\beta\alpha(x_2)) = \alpha n\alpha(x_1) + \beta n\alpha(x_2).$$

Пусть теперь $a_1: K_1 \rightarrow \Pi(K_2)$, $a_2: K_2 \rightarrow \Pi(K_3)$ — вогнутые замкнутые гейловские отображения. Покажем, что

$$n a_2 \circ n a_1 = n(a_2 \circ a_1).$$

Поскольку (предложение 4.10) отображение $n a_2$ возрастает*) и, кроме того,

$$n a_1(x) = \bigcup_{y \in a_1(x)} \langle 0, y \rangle \quad (x \in K_1),$$

то $n a_2(n a_1(x)) = n a_2(a_1(x))$, иными словами, $n a_2 \circ n a_1 = n a_2 \circ a_1$.

Непосредственно из определения нормальной оболочки отображения следует, что $n a_2 \circ a_1 = n(a_2 \circ a_1)$, откуда вытекает наше утверждение.

Рассмотрим наряду с обобщенной моделью \mathfrak{M} объект

$$n\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (n a_{\tau,t})_{(\tau,t) \in \tilde{E}}\}.$$

Мы показали по существу, что $n\mathfrak{M}$ — обобщенная технологическая модель.

Пусть $\chi = (x_t)_{t \in E}$ — оптимальная траектория обобщенной модели \mathfrak{M} . Будем говорить, что эта траектория обладает свойством (Λ) , если найдется функционал $f \in K_T^*$ такой, что χ оптимальна в смысле f и

$$f(x_T) = \max_{y \in a_{T,0}(x_0)} f(y) < \frac{1}{2} \sup_{y \in a_{T,0}(K_0)} f(y).$$

Имеет место

Теорема 11.1 (принцип оптимальности). Пусть оптимальная траектория $\chi = (x_t)$ модели \mathfrak{M} обладает свойством (Λ) и исходит из внутренней точки x конуса K_0 . Тогда при любом $\tau \in E$, $\tau > 0$

$$\|x_\tau\|_{n a_{\tau,0}(x)} = 1.$$

Доказательство. Отметим сначала, что, в силу предложения 4.7, множества $a_{\tau,0}(x)$ и $a_{T,0}(x)$ содержат

*) Мы считаем, что в пространстве X_3 введено отношение порядка с помощью конуса K_3 .

внутренние точки конусов K_τ и K_T соответственно, а потому множества $na_{\tau,0}(x)$ и $na_{T,0}(x)$ телесны. Предположим, что теорема неверна. Тогда при некотором τ

$$\|x_\tau\|_{na_{\tau,0}(x)} < 1,$$

и потому, как легко следует из свойств нормы $\|\cdot\|_{na_{\tau,0}(x)}$, найдется внутренняя точка u конуса K_τ такая, что $x_\tau + u$ принадлежит внутренности множества $na_{\tau,0}(x)$. Покажем, что это противоречит условию теоремы. С этой целью рассмотрим на конусе K_τ функционал φ , положив для $y \in K_\tau$

$$\varphi(y) = \max_{z \in na_{T,\tau}(y)} f(z),$$

где f — функционал из конуса K_T^* такой, что

$$0 < f(x_T) = \max_{z \in a_{T,0}(x)} f(z) < \sup_{z \in a_{T,0}(K_0)} f(z).$$

Такой функционал f найдется, так как χ — оптимальная траектория, обладающая свойством (Λ) .

Отображение $na_{T,\tau}$ вогнуто, и потому функционал φ также вогнут. Если $y \in na_{\tau,0}(x)$, то

$$na_{T,\tau}(y) \subset na_{T,\tau}(na_{\tau,0}(x)) = na_{T,0}(x),$$

и потому

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= \max_{z \in na_{T,\tau}(y)} f(z) \leq \max_{z \in na_{T,0}(x)} f(z) = \\ &= \max_{z \in a_{T,0}(x)} f(z) = f(x_T) = \max_{z \in na_{T,\tau}(x_\tau)} f(z) = \varphi(x_\tau). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varphi(x_\tau) = \max_{y \in na_{\tau,0}(x)} \varphi(y). \quad (11.2)$$

В частности,

$$\varphi(x_\tau + u) \leq \varphi(x_\tau). \quad (11.3)$$

Проверим, что неравенство $\varphi(x_\tau + u) < \varphi(x_\tau)$ невозможно. Для этого рассмотрим функцию $\tilde{\varphi}$, определенную на неотрицательной полуоси следующей формулой $\tilde{\varphi}(\alpha) = \varphi(x_\tau + \alpha u)$ ($\alpha \geq 0$). Очевидно, что $\tilde{\varphi}$ — вогнутая функция, причем $\tilde{\varphi}(1) < \tilde{\varphi}(0)$.

Из последнего неравенства вытекает, что при достаточно больших α функция $\tilde{\varphi}$ должна принимать отрицательные значения. С другой стороны, $\varphi(\alpha) = \varphi(x_\tau + \alpha u) \geq 0$. Мы показали таким образом, что

$$\varphi(x_\tau + u) \geq \varphi(x_\tau). \quad (11.4)$$

Проверим теперь, что $\varphi(x_\tau + u) \neq \varphi(x_\tau)$. Действительно, поскольку элемент $x_\tau + u$ является внутренней точкой множества $na_{\tau,0}(x)$, то найдется достаточно малая окрестность нуля S такая, что

$$x_\tau + u + S \subset na_{\tau,0}(x).$$

Предполагая, что $\varphi(x_\tau + u) = \varphi(x_\tau)$, и используя (11.2), получим

$$\varphi(x_\tau + u) = \max_{s \in S} \varphi(x_\tau + u + s).$$

Иными словами, φ достигает в точке $x_\tau + u$ локального максимума; так как φ — вогнутый функционал, то

$$\begin{aligned} \varphi(x_\tau + u) &= \max_{s \in S} \varphi(x_\tau + u + s) = \sup_{v \in na_{\tau,0}(K_0)} \varphi(v) = \\ &= \sup_{v \in na_{\tau,0}(K_0)} \max_{z \in na_{T,\tau}(v)} f(z) = \sup_{z \in na_{T,0}(K_0)} f(z). \end{aligned}$$

Так как χ обладает свойством (Δ) , то

$$f(x_T) = \varphi(x_\tau) < \sup_{y \in a_{T,0}(K_0)} f(y) = \sup_{y \in na_{T,0}(K_0)} f(y).$$

Функционал φ полунепрерывен сверху. Используя это обстоятельство, можно считать, не умаляя общности, что элемент u выбран настолько малым, что

$$\varphi(x_\tau + u) < \sup_{y \in na_{T,0}(K_0)} f(y).$$

Это неравенство, однако, противоречит полученным выше соотношениям. Таким образом, $\varphi(x_\tau + u) \neq \varphi(x_\tau)$. Учитывая (11.4), имеем $\varphi(x_\tau + u) > \varphi(x_\tau)$, что противоречит (11.3). Полученное противоречие и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е. Пусть \mathfrak{M} — модель, рассмотренная в примере предыдущего пункта, \mathfrak{M}^{x_0} — подмодель этой модели, порожденная

точкой $x_0 = (2, 0)$. Траектория χ , фигурирующая в этом примере, удовлетворяет относительно модели \mathfrak{M}^{x_0} всем условиям теоремы, за исключением условия (A), но тем не менее для нее не выполнен принцип оптимальности. Таким образом, условие (A) существенно для справедливости теоремы.

3. Суперлинейное расширение. Для того чтобы использовать при изучении оптимальных траекторий обобщенной модели методы двойственности, введем специальную конструкцию, которая позволит нам применить к некоторым неоднородным отображениям теорию суперлинейных отображений.

Через $B(K_1, K_2)$ обозначим совокупность всех вогнутых замкнутых гейловских отображений a конуса K_1 в $\Pi(K_2)$, обладающих тем свойством, что $a(K_1) \cap \text{int } K_2 \neq \phi$. (Здесь K_1 и K_2 — выступающие воспроизводящие конусы в пространствах X_1 и X_2 соответственно.)

Пусть $a \in B(K_1, K_2)$, Z — график отображения a . В пространстве $(X_1 \times R^1) \times (X_2 \times R^1)$ рассмотрим множество Z_0 , состоящее из элементов $((x, \mu), (y, \lambda))$, где $(x, y) \in Z$, $\mu = 1$, $\lambda \in [0, 1]$. Коническая оболочка $Co(Z_0)$ множества Z_0 является графиком некоторого положительно однородного отображения a_0 , замыкание которого и будем использовать при изучении отображения a . Как следует из сказанного выше, отображение a_0 определено на незамкнутом конусе

$$\{0\} \cup \{(x, \mu) \in X_1 \times R^1 \mid x \in K_1, \mu > 0\}.$$

При этом $a_0((x, 1)) = a(x) \times [0, 1]$ ($x \in K_1$). Так как a_0 положительно однородно, то для $x \in K_1$, $\mu > 0$

$$a_0((x, \mu)) = \mu a_0\left(\left(\frac{x}{\mu}, 1\right)\right) = \mu a\left(\frac{x}{\mu}\right) \times [0, \mu]. \quad (11.5)$$

Прежде чем перейти к точным определениям, введем некоторые обозначения; а именно, положим

$$\hat{X}_1 = X_1 \times R^1, \hat{X}_2 = X_2 \times R^1, \hat{K}_1 = K_1 \times R_+^1, \hat{K}_2 = K_2 \times R_+^1.$$

Пусть $a \in B(K_1, K_2)$. Отображение $\hat{a}: \hat{K}_1 \rightarrow \Pi(\hat{K}_2)$ назовем *суперлинейным расширением* отображения a , если \hat{a} суперлинейно (точнее говоря, $\hat{a} \in A(\hat{K}_1, \hat{K}_2)$) и,

кроме того,

$$\hat{a}((x, \mu)) = \mu a\left(\frac{x}{\mu}\right) \times [0, \mu] \quad ((x, \mu) \in \hat{K}_1, \mu > 0).$$

Предложение 11.1. Каждое отображение $a \in B(K_1, K_2)$ допускает суперлинейное расширение; при этом суперлинейное расширение единственно и совпадает с замыканием *) \bar{a}_0 отображения a_0 , определенного формулой (11.5).

Доказательство. 1) Рассмотрим отображение a_0 и покажем, что замыкание \bar{a}_0 этого отображения является требуемым суперлинейным расширением. Прежде всего проверим, что \bar{a}_0 определено на всем конусе \hat{K}_1 , т. е. для любого $x \in K_1$ множество $\bar{a}_0((x, 0))$ непусто. В самом деле, пусть (λ_n) — последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Положим $\lambda = \max_n \lambda_n$ и будем считать, что $\lambda \leq 1$. Имеем, используя предложение 4.1,

$$a_0((x, \lambda_n)) = \lambda_n a\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \times [0, \lambda_n] \subset a(x) \times [0, \lambda_n] \subset a(x) \times [0, \lambda].$$

Выберем из множества $a_0((x, \lambda_n))$ элемент (y_n, μ_n) ($n = 1, 2, \dots$), из последовательности $((y_n, \mu_n))$ выберем подпоследовательность $((y_{n_i}, \mu_{n_i}))$, сходящуюся к элементу (y, μ) . (Это возможно, так как множество $a(x) \times [0, \lambda]$ компактно.) Очевидно, что $(y, \mu) \in \bar{a}_0((x, 0))$. Таким образом, отображение \bar{a}_0 определено на всем конусе \hat{K}_1 .

Покажем теперь, что

$$\bar{a}_0((x, \mu)) = a_0((x, \mu)) = \mu a\left(\frac{x}{\mu}\right) \times [0, \mu] \quad (x \in K_1, \mu > 0). \quad (11.6)$$

Пусть $(y, \lambda) \in \bar{a}_0((x, \mu))$. Тогда найдутся последовательности $((y_n, \lambda_n))$ и $((x_n, \mu_n))$, для которых выполняются соотношения $(y_n, \lambda_n) \rightarrow (y, \lambda)$, $(x_n, \mu_n) \rightarrow (x, \mu)$; $(y_n, \lambda_n) \in a_0((x_n, \mu_n))$. Последнее включение равносильно соотношениям $y_n \in \mu_n a\left(\frac{x_n}{\mu_n}\right)$, $\lambda_n \in [0, \mu_n]$. (Мы считаем, что $\mu_n > 0$ при всех n .) Используя замкнутость отображения

*) Напомним, что \bar{a}_0 определяется как отображение, график которого совпадает с замыканием графика a_0 .

a , получим, что $y \in \mu a\left(\frac{x}{\mu}\right)$; кроме того, $\lambda \in [0, \mu]$. Таким образом, $\bar{a}_0((x, \mu)) \subset a_0((x, \mu))$.

Обратное включение очевидно.

Как отмечалось выше, график отображения a_0 совпадает с конусом $Co(Z_0)$, где

$$Z_0 = \{(x, \mu), (y, \lambda)\} \in \hat{X}_1 \times \hat{X}_2 \mid (x, y) \in Z, \mu = 1, \lambda \in [0, 1]\}$$

(здесь Z — график отображения a). График отображения \bar{a}_0 — множество $\overline{Co(Z_0)}$ — представляет собой выпуклый замкнутый конус; это означает, что \bar{a}_0 — вогнутое положительно однородное замкнутое отображение. Если $x \in K_1, \mu > 0$, то множество $\bar{a}_0((x, \mu))$ ограничено; привлекая предложение 4.3, получим отсюда, что \bar{a}_0 — гейловское отображение. Наконец, из соотношения $a(K_1) \cap \cap \text{int } K_2 \neq \emptyset$ легко следует, что $\bar{a}_0(\hat{K}_1) \cap \text{int } \hat{K}_2 \neq \emptyset$. Мы показали, таким образом, что \bar{a}_0 — суперлинейное отображение. Из формулы (11.6) вытекает, что это отображение совпадает с суперлинейным расширением \hat{a} отображения a .

2) Докажем теперь единственность суперлинейного расширения. Предположим, что отображение a имеет два суперлинейных расширения \hat{a}_1 и \hat{a}_2 . Множества Z_1 и Z_2 — графики отображений \hat{a}_1 и \hat{a}_2 соответственно — выпуклы и замкнуты. Так как эти отображения совпадают на конусе $\{(x, \mu) \in \hat{K}_1 \mid \mu > 0\}$, то относительные внутренности $\text{ri } Z_1$ и $\text{ri } Z_2$ этих множеств также совпадают. Последнее означает, что $Z_1 = Z_2$.

Предложение доказано.

Предложение 11.2. Пусть $a \in B(K_1, K_2)$ и \hat{a} — суперлинейное расширение отображения a . Тогда для $x \in K_1$

$$\hat{a}((x, 0)) \subset a(x) \times \{0\}.$$

Доказательство. Пусть $(y, \lambda) \in \hat{a}((x, 0))$. Так как $a(0) = \{0\}$, то $\hat{a}((0, 1)) = \{0\} \times [0, 1]$, и поэтому $(0, 1) \in \hat{a}((0, 1))$. Учитывая, что отображение \hat{a} супераддитивно, имеем

$$(y, \lambda + 1) \subset \hat{a}((x, 0)) + \hat{a}((0, 1)) = \hat{a}((x, 1)),$$

откуда следует, что $y \in a(x), \lambda = 0$.

Предложение доказано.

Следующее предложение показывает, что операции произведения и перехода к суперлинейному расширению перестановочны.

Предложение 11.3. Пусть $a_1 \in B(K_1, K_2)$, $a_2 \in B(K_2, K_3)$. Тогда $\hat{a}_2 \circ a_1 = \hat{a}_2 \circ \hat{a}_1$.

Доказательство. Отметим сначала, что, как следует из предложений 4.12, 4.6, 3.2, отображение $a_2 \circ a_1$ входит в $B(K_1, K_3)$, и потому имеет смысл говорить о суперлинейном расширении этого отображения.

1) Покажем, что

$$\hat{a}_2 \circ a_1((x, 1)) = \hat{a}_2 \circ \hat{a}_1((x, 1)). \quad (11.7)$$

а) Пусть $(y, \lambda) \in \hat{a}_2 \circ \hat{a}_1((x, 1))$. Тогда $\lambda \in [0, 1]$; кроме того, $y \in a_2 \circ a_1(x)$, и потому найдется z из K_2 такое, что $y \in a_2(z)$, $z \in a_1(x)$. Имеем

$$(y, \lambda) \in \hat{a}_2((z, 1)) \subset \hat{a}_2(\hat{a}_1(x, 1)) = \hat{a}_2 \circ \hat{a}_1((x, 1)).$$

Таким образом,

$$\hat{a}_2 \circ \hat{a}_1((x, 1)) \subset \hat{a}_2 \circ \hat{a}_1((x, 1)).$$

б) Пусть $(y, \lambda) \in \hat{a}_2 \circ \hat{a}_1((x, 1))$; тогда найдется $(z, \nu) \in \hat{K}_2$, при котором

$$(y, \lambda) \in \hat{a}_2((z, \nu)), \quad (z, \nu) \in \hat{a}_1((x, 1)).$$

Из последнего соотношения вытекает, что $z \in a_1(x)$, $\nu \in [0, 1]$. Предположим сначала, что $\nu > 0$. Тогда

$$y \in \nu a_2\left(\frac{z}{\nu}\right), \quad \lambda \in [0, \nu].$$

Так как $a_2(0) = \{0\}$, то, в силу предложения 4.1, $\nu a_2\left(\frac{z}{\nu}\right) \subset a_2(z)$. Таким образом, $y \in a_2(z)$, откуда вытекает, что

$$(y, \lambda) \in \hat{a}_2 \circ \hat{a}_1((x, 1))$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\nu = 0$. Используя предложение 11.2, получим $y \in a_2(z)$, $\lambda = 0$.

Таким образом, и в этом случае

$$(y, \lambda) \in \hat{a}_2 \circ \hat{a}_1((x, 1)),$$

и, следовательно, включение

$$\hat{a}_2 \circ \hat{a}_1((x, 1)) \subset a_2 \circ a_1((x, 1)),$$

а вместе с ним и равенство (11.7) доказаны.

2) Из (11.7) немедленно вытекает, что

$$a_2 \circ a_1((x, \mu)) = \hat{a}_2 \circ \hat{a}_1((x, \mu)) \quad (\mu > 0).$$

3) Мы показали, что суперлинейные отображения $a_2 \circ a_1$ и $\hat{a}_2 \circ \hat{a}_1$ совпадают на внутренности конуса K_1 . Отсюда следует, что относительные внутренности их графиков совпадают и, стало быть, сами эти отображения совпадают.

Предложение доказано.

Опишем теперь отображение, двойственное к суперлинейному расширению.

Предложение 11.4. Пусть $a \in B(K_1, K_2)$. Тогда для $(f, c) \in (\hat{K}_1)^*$

$$(\hat{a})'((f, c)) = \{(g, c') \in (\hat{K}_2)^* \mid f(x) + c \geq \sup_{y \in a(x)} (g(y) + c') \text{ для любого } x \in K_1\}.$$

Доказательство. 1) Пусть $(g, c') \in (\hat{a})'((f, c))$. Тогда если $x \in K_1$, то $\hat{a}((x, 1)) = a(x) \times [0, 1]$, и потому

$$(f, c)((x, 1)) \geq \sup_{y \in a(x), \lambda \in [0, 1]} (g, c')((y, \lambda)),$$

т. е.

$$f(x) + c \geq \sup_{y \in a(x)} (g(y) + c'). \quad (11.8)$$

2) Пусть для любых $x \in K_1$ выполнено (11.8). Нам надо показать, что для любого элемента $z = ((x, \mu), (y, \lambda))$ конуса \hat{Z} — графика отображения \hat{a} — имеет место неравенство

$$f(x) + c\mu \geq g(y) + c'\lambda. \quad (11.9)$$

Так как этот конус есть замыкание множества $\{((x', \mu'), (y', \lambda')) \in \hat{Z} \mid \mu' > 0\}$, то, не умаляя общности, можно считать, что $\mu > 0$. В этом случае $\frac{y}{\mu} \in a\left(\frac{x}{\mu}\right)$,

$\frac{\lambda}{\mu} \leq 1$, и потому, в силу (11.8),

$$f\left(\frac{x}{\mu}\right) + c \geq g\left(\frac{y}{\mu}\right) + c' \geq g\left(\frac{y}{\mu}\right) + c' \frac{\lambda}{\mu},$$

откуда и следует (11.9).

Предложение доказано.

4. Характеристика оптимальных траекторий. Рассмотрим обобщенную модель

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_{\tau,t})_{(\tau,t) \in \tilde{E}}\}$$

и наряду с ней объект

$$\hat{\mathfrak{M}} = \{E, (\hat{X}_t)_{t \in E}, (\hat{K}_t)_{t \in E}, (\hat{a}_{\tau,t})_{(\tau,t) \in \tilde{E}}\}.$$

Из предложения 11.3 следует, что $\hat{\mathfrak{M}}$ — технологическая модель. Будем называть эту модель *суперлинейным расширением* обобщенной модели \mathfrak{M} . Непосредственно из определения суперлинейного расширения вытекает, что семейство $\chi = (x_t)_{t \in E}$ является траекторией обобщенной модели \mathfrak{M} тогда и только тогда, когда семейство $\hat{\chi} = ((x_t, 1))_{t \in E}$ является траекторией модели $\hat{\mathfrak{M}}$.

Т е о р е м а 11.2. Пусть x — внутренняя точка конуса K_0 и $\bar{\chi} = (\bar{x}_t)_{t \in E}$ — оптимальная траектория модели \mathfrak{M} , исходящая из точки x и обладающая свойством (Λ) (т. е. существует $f_T \in K_T^*$ такой, что $f_T(\bar{x}_T) < \sup_{y \in a_{T,0}(K_0)} f(y)$ и $\bar{\chi}$ оптимальна в смысле f_T). Тогда най-

дутся семейства $\bar{f} = (\bar{f}_t)_{t \in E}$ ($\bar{f}_t \in K_t^*$) и $\bar{v} = (\bar{v}_t)_{t \in E}$ (\bar{v}_t — неотрицательное число) такие, что

а) для любой траектории $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} функция h_χ , определенная на E формулой

$$h_\chi(t) = \bar{f}_t(x_t) + \bar{v}_t \quad (t \in E),$$

убывает,

б) функция $h_{\bar{\chi}}$ постоянна,

в) $\bar{f}_T = f_T$, $\bar{v}_T = 0$, $\bar{f}_t \neq 0$ $(t \in E)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим суперлинейное расширение $\hat{\mathfrak{M}}$ модели \mathfrak{M} и траекторию $\hat{\chi} = ((\bar{x}_t, 1))_{t \in E}$ модели $\hat{\mathfrak{M}}$, исходящую из внутренней точки $(x, 1)$ конуса \hat{K}_0 . Эта траектория оптимальна в смысле функционала

$(f_T, 0)$. Из теоремы 9.2 теперь следует, что найдется семейство $((\bar{f}_t, \bar{v}_t))_{t \in E}$ $((\bar{f}_t, \bar{v}_t) \in (\hat{K}_t)^*, t \in E)$ такое, что

а') для любой траектории $\hat{\chi} = ((x_t, \lambda_t))_{t \in E}$ модели $\hat{\mathfrak{M}}$ функция $\tilde{h}_{\hat{\chi}}$:

$$\tilde{h}_{\hat{\chi}}(t) = \bar{f}_t(x_t) + \bar{v}_t \lambda_t \quad (t \in E),$$

убывает,

б') функция \bar{h} :

$$\bar{h}(t) = \bar{f}_t(x_t) + \bar{v}_t \quad (t \in E),$$

постоянна,

$$в') (\bar{f}_T, \bar{v}_T) = (f_T, 0), \quad (\bar{f}_t, \bar{v}_t) \neq 0 \quad (t \in E).$$

Покажем, что

$$\bar{f}_t \neq 0 \quad (t \in E). \quad (11.10)$$

Так как семейство $\chi_0 = ((x_t, 1))_{t \in E}$, где $x_t = 0$ ($t \in E$), является траекторией модели $\hat{\mathfrak{M}}$, то функция \tilde{h}_{χ_0} :

$$\tilde{h}_{\chi_0}(t) = \bar{v}_t \quad (t \in E)$$

убывает. Поскольку функция \bar{h} постоянна, то функция \bar{h} :

$$\bar{h}(t) = \bar{f}_t(x_t) \quad (t \in E),$$

возрастает.

Из сказанного следует, что для доказательства (11.10) достаточно проверить, что $\bar{f}_0 \neq 0$. Действительно, в этом случае $\bar{f}_0(x_0) > 0$ (так как $x_0 \in \text{int } K_0$) и потому $\bar{f}_t(x_t) > 0$ ($t \in E$), т. е. $\bar{f}_t \neq 0$. Предположим, что $\bar{f}_0 = 0$. Тогда, в силу б') и в'),

$$\bar{v}_0 = f_T(x_T). \quad (11.11)$$

Так как по условию, $f_T(x_T) < \sup_{y \in \text{па}_{T,0}(K_0)} f_T(y)$,

то найдется траектория $\hat{\chi} = ((x_t, 1))$ модели $\hat{\mathfrak{M}}$ такая, что $f_t(x_T) > f_T(x_T)$. С другой стороны, в силу а'),

$$\bar{v}_0 \geq f_T(x_T) > f_T(x_T),$$

что противоречит (11.11). Таким образом, наше предположение было неверно и, стало быть, соотношение (11.10) справедливо. Найденные нами семейства \bar{f} и \bar{v} удовлетворяют условиям а), б), в).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 11.2 легко вытекает теорема 11.1 (принцип оптимальности).

З а м е ч а н и е 2. Если траектория χ не обладает свойством (Λ) , то можно гарантировать лишь существование семейств $(f_t)_{t \in E}$ и $(v_t)_{t \in E}$, удовлетворяющих условиям а) и б) и таких, что $\|f_t\| + v_t > 0$ ($t \in E$).

З а м е ч а н и е 3. Нетрудно проверить, что траектория χ , для которой существуют семейства φ и v , удовлетворяющие условиям а), б), в), является оптимальной.

З а м е ч а н и е 4. Так же, как и для обычных технологических моделей, доказано несколько более сильное утверждение, нежели сформулированное в теореме, а именно, существование семейств $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ и $v = (v_t)_{t \in E}$ таких, что $(f_\tau, v_\tau) \in (\hat{a}_{\tau, t})(f_t, v_t)$ ($(\tau, t) \in \tilde{E}$). Последнее означает, что неравенство

$$f_\tau(x_\tau) + v_\tau \leq f_t(x_t) + v_t$$

выполняется для всех $x \in K_t$, $y \in a_{\tau, t}(x)$, в частности, и для таких элементов x , через которые не проходит ни одна траектория (т. е. $x \notin a_{T, 0}(K_0)$).

5. Некоторые обобщения. В дальнейшем (гл. VI) нам понадобится рассмотреть обобщенные модели, производственные отображения которых определены, вообще говоря, не на конусе. Точнее говоря, речь идет об объекте

$$\mathfrak{M} = \{\{0, 1, 2, \dots\}, (X_t)_{t=0}^\infty, (K_t)_{t=0}^\infty, (\Omega_t)_{t=0}^\infty\}, \quad (11.12)$$

где пространства X_t и конусы K_t ($t = 0, 1, \dots$) таковы же, что и в технологической модели, Ω_t — выпуклое замкнутое множество, лежащее в прямом произведении $K_t \times K_{t+1}$ и обладающее следующими свойствами: $(0, 0) \in \Omega_t$, $(0, y) \notin \Omega_t$ при $y \neq 0$, $\text{Pr}_2 \Omega_t \cap \text{int } K_{t+1} \neq \emptyset$. Через a_t обозначим отображение, графиком которого служит Ω_t . Полагая

$$a_{\tau, t} = a_\tau \circ a_{\tau-1} \circ \dots \circ a_t \quad (\tau > t),$$

нетрудно записать модель (11.12) в стандартном виде

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\}$$

(здесь, однако, надо иметь в виду, что отображения $a_{\tau, t}$ заданы не на всем конусе K_t).

В модели \mathfrak{M} определим, как обычно, траектории, T -траектории и T -куски траекторий, а также оптимальные (эффективные) траектории и T -траектории.

Используя теорему 11.2, нетрудно дать характеристику конечных траекторий модели (11.12). С этой целью прежде всего покажем, что отображения a_t можно распространить с сохранением их свойств на весь конус K_t .

Пусть a — точечно-множественное отображение, график которого Ω лежит в прямом произведении выступающих воспроизводящих замкнутых конусов K' и K'' . Так же как и в случае отображений, определенных на конусе, отображение a назовем *вогнутым* (соответственно, *замкнутым*), если Ω выпуклое (замкнутое) множество; будем говорить, что a *монотонно* (возрастает), если из условий $x_1, x_2 \in \text{Pr}_1\Omega$, $x_1 - x_2 \in K'$ следует, что $a(x_1) \supset a(x_2)$.

Предложение 11.5. Пусть множество Ω , лежащее в прямом произведении $K' \times K''$ конусов K' и K'' , является графиком вогнутого замкнутого монотонного отображения a , причем $a(0) = \{0\}$ и $\text{Pr}_2\Omega \cap \text{int } K'' \neq \emptyset$. Тогда найдется отображение $\tilde{a} \in B(K', K'')$, возрастающее и такое, что

$$\tilde{a}(x) = a(x) \quad (x \in \text{Pr}_1\Omega).$$

Доказательство. Рассмотрим множество $\tilde{\Omega} = \Omega + (K' \times \{0\})$. Так как $(0, 0) \in \Omega$, то при любом $x \in K'$

$$\tilde{a}(x) = \{y \in K'' \mid (x, y) \in \tilde{\Omega}\}$$

непусто. Таким образом, отображение \tilde{a} , графиком которого является $\tilde{\Omega}$, определено на всем конусе K' . Из выпуклости множества $\tilde{\Omega}$ следует, что это отображение вогнуто. Покажем, что \tilde{a} — замкнутое отображение, иными словами, проверим замкнутость $\tilde{\Omega}$. Пусть $((x_n, y_n)) \in \tilde{\Omega}$ и $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. Тогда $x_n = x'_n + x''_n$, где $(x'_n, y_n) \in \tilde{\Omega}$ и $x''_n \in K'$. Из ограниченности последовательности $((x_n, y_n))$ вытекает ограниченность последовательностей (x'_n) , (x''_n) и (y_n) . Не умаляя общности, считаем, что последовательности (x'_n) и (x''_n) сходятся к элементам x' и x'' соответственно. В силу замкнутости Ω справедливо включение $(x', y) \in \Omega$; кроме того, $x'' \in K'$, откуда и следует, что $(x, y) \in \tilde{\Omega}$. Таким образом, отображение \tilde{a} замкнуто. Очевидно, что $\tilde{a}(K') \cap \text{int } K'' \neq \emptyset$. Покажем теперь, что для $x \in \text{Pr}_1\Omega$ справедливо равенство $a(x) = \tilde{a}(x)$.

В самом деле, включение $a(x) \subset \bar{a}(x)$ очевидно. Пусть теперь $y \in \bar{a}(x)$. Тогда $(x, y) = (x', y') + (x'', 0)$, где $y' \in a(x')$. Из сказанного следует, что $y = y'$, $x - x' \in K'$. Так как отображение a монотонно, то $y \in a(x)$, откуда и следует нужное нам равенство. Из сказанного вытекает, в частности, что \bar{a} — гейловское отображение. Проверим, что \bar{a} монотонно. В самом деле, если $x \in K'$, то $(x, 0) = (0, 0) + (x, 0) \in \Omega + (K' \times \{0\}) = \bar{\Omega}$, т. е. $0 \in \bar{a}(x)$. Монотонность \bar{a} следует теперь из предложения 4.10. Итак, $\bar{a} \in B(K', K'')$, \bar{a} монотонно и $\bar{a}(x) = a(x)$ ($x \in \text{Pr}_1 \Omega$). Предложение доказано.

Т е о р е м а 11.3. Пусть модель (11.12) такова, что отображения a_t ($t = 0, 1, \dots$) монотонны. Пусть, далее, конечная оптимальная траектория $\bar{x} = (\bar{x}_t)_{t=0}^T$ этой модели исходит из внутренней точки x конуса K_0 и обладает свойством (A), т. е. существует функционал $f \in K_T^*$ такой, что \bar{x} оптимальна в смысле f и

$$f(\bar{x}_T) < \sup_{y \in \text{Pr}_2 \Omega_T} f(y).$$

Тогда найдутся функционалы f_0, \dots, f_T и числа v_0, \dots, v_T ($f_t \in K_t^*$, $v_t \geq 0$, $t = 0, 1, \dots, T$) такие, что

- $f_t(x) + v_t \geq f_{t+1}(y) + v_{t+1}$ ($(x, y) \in \Omega_t$, $t = 0, 1, \dots, T-1$),
- $f_t(x_t) + v_t = f_{t+1}(x_{t+1}) + v_{t+1}$ ($t = 0, 1, \dots, T$),
- $f_T = f$, $v_T = 0$, $f_t \neq 0$ ($t = 0, 1, \dots, T$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Наряду с обобщенной моделью (11.12) рассмотрим обобщенную модель

$$\tilde{\mathfrak{M}}_T = \{\{0, 1, \dots, T\}, (X_t)_{t=0}^T, (K_t)_{t=0}^T, (\bar{a}_{\tau,t})_{0 \leq t < \tau \leq T}\},$$

где $\bar{a}_{\tau,t} = \bar{a}_\tau \circ \bar{a}_{\tau-1} \circ \dots \circ \bar{a}_t$ ($\tau > t$), \bar{a}_t построено по отображению a_t так же, как в предложении 11.5. T -траектория χ модели $\tilde{\mathfrak{M}}$ является оптимальной траекторией модели $\tilde{\mathfrak{M}}_T$, удовлетворяющей условию (A). Применяя теперь теорему 11.2 и замечание 4 к ней, убедимся в справедливости нашей теоремы.

Перейдем к вопросу о характеристике оптимальных (бесконечных) траекторий модели \mathfrak{M} . Естественный путь для отыскания характеристики оптимальной траектории заключается в том, чтобы найти характеристику ее T -кусков, а затем, воспользовавшись диагональным процессом, перейти к пределу при $T \rightarrow \infty$. Оказывается, однако, что

этот предельный переход часто приводит к характеристике $((f_t, v_t))$ такой, что $f_t = 0$, $v_t = 1$ при всех t . Эта характеристика не представляет интереса. Сказанное, в частности, означает, что оптимальные траектории модели \mathfrak{M} , вообще говоря, не обязаны иметь характеристику $((f_t, v_t))$, где $f_t \neq 0$, даже если они исходят из внутренней точки конуса K_0 . В связи с этим охарактеризуем эти траектории несколько иным способом, нежели употреблявшийся ранее. Для этого вернемся к конечным оптимальным траекториям.

Пусть $\bar{\chi} = (x_t)_{t=0}^T$ — T -шаговая траектория модели \mathfrak{M} и существуют семейства $(f_t)_{t=0}^T$ и $(v_t)_{t=0}^T$ такие, что при всех $t = 0, \dots, T-1$

$$f_t(x) + v_t \geq f_{t+1}(y) + v_{t+1} \quad ((x, y) \in \Omega_t), \quad (11.13)$$

$$f_t(x_t) + v_t = f_{t+1}(x_{t+1}) + v_{t+1}, \quad (11.14)$$

и, кроме того, $v_T = 0$. Используя последнее равенство, можно из формулы (11.14) найти числа v_t , а именно,

$$v_t = f_T(x_T) - f_t(x_t). \quad (11.15)$$

Вычитая из соотношения (11.13) равенство (11.14), получим, что при всех t и $(x, y) \in \Omega_t$

$$f_t(x) - f_t(x_t) \geq f_{t+1}(y) - f_{t+1}(x_{t+1}). \quad (11.16)$$

Обратно, если семейство $(f_t)_{t=0}^T$ таково, что при всех t выполнено (11.16), то, определив числа v_t формулой (11.15), придем к соотношениям (11.13), (11.14). Таким образом, соотношения (11.13), (11.14) (при $v_T = 0$) и (11.15), (11.16) равносильны.

Введем теперь следующее определение. Будем говорить, что траектория $\chi = (x_t)$ обобщенной модели (11.12) допускает характеристику, если найдется последовательность $\varphi = (f_t)$ (где $f_t \in K_t^*$, $f_t \neq 0$) такая, что при всех $t = 0, 1, 2, \dots$

$$f_t(x) - f_t(x_t) \geq f_{t+1}(y) - f_{t+1}(x_{t+1}) \quad ((x, y) \in \Omega_t)$$

и, кроме того, $f_t(x_t) > 0$. При этом последовательность φ называется характеристикой траектории χ . (Если \mathfrak{M} является технологической моделью (т. е. множества Ω_t суть конусы) и $\text{Pr}_2 \Omega_t = K_{t+1}$, то это определение совпадает

ст с определением характеристики, данным для технологических моделей.)

Нетрудно проверить, что траектория χ обобщенной модели, допускающая характеристику, является оптимальной. В самом деле, для каждого T -куска этой траектории выполняется соотношение (11.15) и, стало быть, при соответствующем выборе чисел v_0, \dots, v_T соотношения (11.13), (11.14). Из этих соотношений следует в свою очередь оптимальность траектории χ .

Имеет место

Т е о р е м а 11.4. Пусть обобщенная технологическая модель (11.12) такова, что отображения a_t ($t = 0, 1, \dots$) монотонны. Пусть, далее, оптимальная траектория $\chi = (x_t)$ этой модели исходит из внутренней точки x конуса K_0 и обладает следующим свойством: найдется натуральное T такое, что при всех $\tau > T$ элемент x_τ не является граничной сверху точкой множества $\text{Pr}_2 \Omega_{\tau-1}$. Тогда траектория $\tilde{\chi}$ допускает характеристику.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия теоремы следует, что τ -кусок траектории χ обладает при $\tau > T$ свойством (Λ) . Поэтому, в силу теоремы 11.3, найдутся семейства $(f_i^\tau)_{i=0}^\tau$ и $(v_i^\tau)_{i=0}^\tau$, для которых выполнены соотношения (11.13), (11.14) или, что то же самое, (11.16). Иными словами,

$$f_i^\tau(x) - f_i^\tau(x_i) \geq f_{i+1}^\tau(y) - f_{i+1}^\tau(x_{i+1}) \\ ((x, y) \in \Omega_i; i = 0, 1, \dots, \tau - 1).$$

Не умаляя общности, считаем $\|f_T^\tau\| = 1$. Отметим еще, что, как легко следует из (11.13), (11.14), T -кусок χ_T траектории χ оптимален в смысле f_T^τ . Покажем, что при любом τ и любом t ($T \leq t \leq \tau$) найдется константа c_t (не зависящая от τ) такая, что $\|f_t^\tau\| \leq c_t$. В самом деле, при $t = T$ можно положить $c_t = 1$. Предположим, что при некотором $t \geq T$ константа c_t существует, и покажем, что можно найти число c_{t+1} , обладающее нужным свойством. Так как x_{t+1} не является граничной сверху точкой множества $\text{Pr}_2 \Omega_t$, то найдется элемент $u \in \text{int } K_{t+1}$ такой, что $x_{t+1} + u \in \text{Pr}_2 \Omega_t$. Пусть элемент $x \in \text{Pr}_1 \Omega_t$ обладает тем свойством, что $(x, x_{t+1} + u) \in \Omega_t$. Тогда

$$f_t^\tau(x) - f_t^\tau(x_t) \geq f_{t+1}^\tau(x_{t+1} + u) - f_{t+1}^\tau(x_{t+1}),$$

т. е.

$$f_t^c(x - \bar{x}_t) \geq f_{t+1}^c(u). \quad (11.17)$$

Положим

$$m = \min_{g \in K_{t+1}^*, \|g\| = 1} g(u).$$

Так как u — внутренняя точка конуса K_{t+1} , то $m > 0$. Используя (11.17), имеем

$$\begin{aligned} c_t \|x - \bar{x}_t\| &\geq \|f_t^c\| \cdot \|x - \bar{x}_t\| \geq f_t^c(x - \bar{x}_t) \geq \\ &\geq f_{t+1}^c(u) = \frac{f_{t+1}^c(u)}{\|f_{t+1}^c\|} \cdot \|f_{t+1}^c\| \geq m \|f_{t+1}^c\|, \end{aligned}$$

откуда следует, что в качестве c_{t+1} можно принять число $\frac{c_t}{m} \|x - \bar{x}_t\|$. Итак, при всех $t \geq T$ последовательности $(f_t^c)_{\tau=t}^\infty$ ограничены. Используя обычным образом диагональный процесс, найдем последовательность $(f_t)_{t=T}^\infty$, для которой выполняются соотношения

$$f_t(x) - f_t(\bar{x}_t) \geq f_{t+1}(y) - f_{t+1}(\bar{x}_{t+1}) \quad ((x, y) \in \Omega_t).$$

При этом $\|f_T\| = 1$. Покажем, что $f_t \neq 0$ ($t \geq T$). Действительно, $f_T \neq 0$. Предположим, что $f_t \neq 0$ при некотором $t \geq T$. Тогда если $f_{t+1} = 0$, то при всех $x \in \text{Pr}_1 \Omega_t$ выполняется $f_t(x) \geq f_t(\bar{x}_t)$. В частности, полагая $x = 0$, получим, что $f_t(\bar{x}_t) = 0$. Заметим, что $f_t^c(\bar{x}_t) = \max_{y \in a_{t,0}(x_0)} f_t^c(y)$ при любом $\tau \geq t$, а потому и $f_t(\bar{x}_t) = \max_{y \in a_{t,0}(x_0)} f_t(y)$.

Так как $x_0 \in \text{int } K_0$, то множество $a_{t,0}(x_0)$ содержит внутреннюю точку конуса K_t . (В этом легко убедиться, применив предложение 4.7 к отображению $\bar{a}_{t,0}$, построенному при доказательстве теоремы 11.3.) Из сказанного следует, что равенство $f_t(\bar{x}_t) = 0$ может иметь место лишь в случае, когда $f_t = 0$, что невозможно. Таким образом, $f_{t+1} \neq 0$.

Рассмотрим теперь номера $t = 0, 1, \dots, T-1$. Так как T -кусоч χ_T траектории χ оптимален в смысле f_T , то, в силу теоремы 11.3, найдутся функционалы f_0, \dots, f_{T-1} и числа ν_0, \dots, ν_{T-1} такие, что семейства

$$(f_0, \dots, f_{T-1}, f_T) \text{ и } (\nu_0, \dots, \nu_{T-1}, 0)$$

характеризуют χ_t (т. е. удовлетворяют условиям а) — в) этой теоремы). Это означает, что последовательность $\varphi = (f_t)_{t=0}^{\infty}$ является искомой характеристикой траектории χ .

Теорема доказана.

§ 12. ХАРАКТЕРИСТИКА ТРАЕКТОРИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

1. Введение. Модели, рассматриваемые в настоящее время, как правило, конечномерные. Сейчас, однако, уже становится ясным, что углубленное исследование ряда экономических явлений требует рассмотрения бесконечномерных моделей. В частности, бесконечномерные модели естественным образом появляются в том случае, когда время и местоположение предполагаются непрерывными и учитывается запаздывание, задержка между произведенными затратами и выпуском. В качестве примера в конце параграфа схематически описывается производство, функционирующее в непрерывном времени, в котором фонды различаются по сроку службы и степени неостроенности. Модель для этого производства автоматически является бесконечномерной.

Здесь мы показываем, что теоремы о характеристике оказываются справедливыми в существенно более общей, нежели конечномерная, ситуации. Предполагаем, что читатель знаком с основами теории локально выпуклых пространств (см. Бурбаки [1]), определения и результаты этой теории, используемые ниже, явно не формулируются. В п. 2 рассматриваются сублинейные функционалы и соответствующие им выпуклые множества, п. 3 посвящен точечно-множественным отображениям, в пп. 4, 5 описывается модель.

Большинство результатов этого параграфа формулируются, но не доказываются.

2. Суперлинейные функционалы и K -опорные множества; вполне положительные сублинейные функционалы и нормальные множества. Рассмотрим локально выпуклое пространство X и выпуклый замкнутый конус K в этом пространстве. Условимся о следующих обозначениях. Через X^* будем обозначать пространство, сопряженное к X , через K^* — конус в X^* , сопряженный к K . Элементы K^* будем называть положительными функционалами. Через X' обозначим пространство, совпадающее по составу элементов с X^* , но наделенное топологией $\sigma(X^*, X)$; через K' обозначим конус в X' , совпадающий по составу элементов с K^* .

Так же, как и в конечномерном случае, функционал q , определенный на K , назовем *суперлинейным*, если он положительно однороден ($q(\lambda x) = \lambda q(x)$, $\lambda > 0$, $x \in K$), супераддитивен ($q(x+y) \geq q(x) + q(y)$, $x, y \in K$) и полунепрерывен сверху. Линейный функционал h назовем *опорным* к q , если $h(x) \geq q(x)$ для всех x из K . Множество всех линейных функционалов, опорных к q , обозначим через U_q . Справедливо следующее обобщение теоремы Фенхеля.

Теорема 12.1 (теорема Херманндера). Если q — суперлинейный функционал, определенный на конусе K , то множество

U_q непусто; при этом для любого $x \in K$

$$q(x) = \inf_{h \in U_q} h(x).$$

Доказательство этой теоремы см. Хермандер [1].

Совокупность всех суперлинейных функционалов, определенных на K , обозначим через $Q(K)$. Введем в $Q(K)$ естественным образом операции сложения и умножения на неотрицательное число, а также отношение порядка; тем самым $Q(K)$ превращается в упорядоченное полулинейное пространство.

Непустое подмножество U пространства X' назовем K' -устойчивым, если $U + K' \subset U$; подмножество U этого пространства назовем K -опорным, если оно выпукло, замкнуто, K' -устойчиво и, кроме того, $\inf_{x \in U} h(x) > -\infty$. Совокупность всех K -опорных множеств

обозначим через $PQ(K)$. Введем в $PQ(K)$ отношение порядка, положив $U_1 \geq U_2$, если $U_1 \subset U_2$ ($U_1, U_2 \in PQ(K)$). Естественным образом введем в $PQ(K)$ операцию умножения на положительное число. Кроме того, положим $0 \cdot U = K'$. Если $U_1, U_2 \in PQ(K)$, то через $U_1 \dot{+} U_2$ обозначим замыкание (в X') множества $U_1 + U_2$. Относительно введенного отношения порядка, операции $\dot{+}$ и умножения на неотрицательные числа $PQ(K)$ является упорядоченным полулинейным пространством.

Т е о р е м а 12.2. *Отображение $q \rightarrow U_q$ является изоморфизмом упорядоченных полулинейных пространств $Q(K)$ и $PQ(K)$.*

Функционал p , определенный на K , назовем *сублинейным*, если $-p$ является суперлинейным функционалом. Линейный функционал h называется *опорным* к сублинейному функционалу p , если $h(x) \leq p(x)$ для всех x из K . Множество всех линейных функционалов, опорных к сублинейному p , обозначим так же, как и для суперлинейного функционала, символом U_p (это не приведет к путанице, так как из контекста всегда ясно, о каком функционале идет речь). Положим также $U_p^+ = U_p \cap K'$. Сублинейный функционал p назовем *вполне положительным*, если

$$p(x) = \sup_{h \in U_p^+} h(x) \quad (x \in K).$$

Легко проверить, что каждый монотонный функционал p вполне положителен (монотонность p означает, что $p(x) \geq p(y)$, если $x - y \in K$). Обратное утверждение удается доказать лишь в следующих двух случаях: 1) конус K телесен, функционал p непрерывен, 2) конус K минидрален $*$), операция I^+ : $x \rightarrow x^+$ непрерывна.

При изучении вполне положительных функционалов важную роль играют нормальные множества.

Рассмотрим локально выпуклое пространство X , в котором выделен выпуклый замкнутый конус K . Подмножество Ω конуса K

$*$) Конус K называется *минидральным*, если отношение порядка, индуцированное им в пространстве X , таково, что любые два элемента из X имеют верхнюю грань (супремум). Если K минидрален, то каждому $x \in X$ можно сопоставить элемент $x^+ = \sup(x, 0)$.

назовем *нормальным* (в смысле K), если $\overline{\Omega - K} \cap K = \Omega$. (Здесь черта означает замыкание.) Из определения непосредственно следует, что компактное подмножество Ω конуса K нормально тогда и только тогда, когда с каждой своей точкой x оно содержит конусный отрезок $\langle 0, x \rangle$ (в этом случае $\overline{\Omega - K} = \Omega - K$).

Нормальной оболочкой подмножества Ω конуса K назовем пересечение всех нормальных множеств, содержащих Ω . Нормальную оболочку Ω обозначим символом $n\Omega$.

Предложение 12.1. Если $\Omega \subset K$, то $n\Omega = \overline{\Omega - K} \cap K$.
Рассмотрим теперь снова сублинейные функционалы на конусе K . Имеет место

Теорема 12.3. Пусть p — сублинейный функционал, определенный на конусе K и обладающий следующим свойством: найдется подмножество ξ конуса K' такое, что

$$p(x) = \sup_{h \in \xi} h(x) \quad (x \in K).$$

Тогда 1) функционал p вполне положителен, 2) множество U_p^+ совпадает с нормальной оболочкой (в смысле K') выпуклой оболочки множества ξ .

3. Точечно-множественные отображения. Пусть X_1 и X_2 — локально выпуклые пространства, в которых выделены выпуклые замкнутые конусы K_1 и K_2 соответственно. Мы будем рассматривать отображения a конуса K_1 в $\Pi(K_2)$. Так же, как и в конечномерном случае, определим вогнутые, положительно однородные, супераддитивные, гейловские отображения. Заметим, что предложения 4.1—4.5 остаются справедливыми и в нашем случае (при их доказательстве использовалась лишь векторная структура пространств X_1 и X_2 ; лишь в предложении 4.3 вместо ограниченности множества $a(x)$ следует говорить о его алгебраической ограниченности; последнее означает, что $\sup \{ \lambda \mid y + \lambda z \in a(x) \} < \infty$ для всех $y \in a(x)$ и $z \in X_2$). Так же, как в конечномерном случае, отображение a конуса K_1 в $\Pi(K_2)$ назовем *замкнутым*, если график Z этого отображения является замкнутым (в пространстве $X_1 \times X_2$) множеством. Если a — замкнутое отображение, то для любого $x \in K_1$ множество $a(x)$ замкнуто.

Введем теперь определение замыкания отображения. Если a — отображение конуса K_1 в $\Pi(K_2)$, то замыканием этого отображения назовем отображение \bar{a} конуса K_1 в $\Pi(K_2)$, график которого \bar{Z} совпадает с замыканием графика Z отображения a .

Предложение 12.2. Замыкание вогнутого отображения положительно однородно.

Важную роль в дальнейшем играют отображения, которые назовем *полу непрерывными сверху*. Будем говорить, что отображение a конуса K_1 в $\Pi(K_2)$ *полу непрерывно сверху*, если для любого $g \in K_2'$ функционал q_g , определенный на K_1 формулой $q_g(x) = \sup_{y \in a(x)} g(y)$, принимает лишь конечные значения и *полу непрерывен сверху* *).

*) Суперлинейное отображение *полу непрерывно сверху* (см. § 4).

Если a вогнутое, положительно однородное, полунепрерывное сверху отображение, то функционал q_g ($g \in K_2'$) является суперлинейным.

Предложение 12.3. Если a — супераддитивное, полунепрерывное сверху отображение, то оно является гейловским.

Отметим еще, что имеет место

Предложение 12.4. Замыкание полунепрерывного сверху отображения полунепрерывно сверху.

Следующие предложения показывают, что класс полунепрерывных сверху отображений достаточно широк.

Предложение 12.5. Если отображение a полунепрерывно сверху в смысле Бержа (см. Берж [1]), то оно полунепрерывно сверху.

Предложение 12.6. Если отображение a таково, что множество $a(x)$ замкнуто, выпукло и ограничено для любого $x \in K_1$ и, кроме того, a непрерывно как однозначный оператор со значениями в пространстве выпуклых множеств*), то a полунепрерывно сверху.

Вогнутое замкнутое отображение a конуса K_1 в $\Pi(K_2)$ (K_i — конус в пространстве X_i ($i = 1, 2$)) назовем *вполне замкнутым*, если пространства X_1 и X_2 метризуемы и образ $a(\xi)$ любого слабо компактного подмножества ξ конуса K_1 является слабым компактом.

Предложение 12.7. Вполне замкнутое отображение полунепрерывно сверху.

Важную роль в дальнейшем будут играть нормальные и вполне нормальные отображения.

Вогнутое отображение a конуса K_1 в $\Pi(K_2)$ назовем *нормальным*, если для любого $x \in K_1$ множество $a(x)$ нормально. Нормальной оболочкой вогнутого отображения a назовем отображение na , которое каждому x из K_1 ставит в соответствие множество $na(x)$.

Предложение 12.8. Если отображение a вогнуто, то и отображение na вогнуто.

Следствие. Нормальная оболочка вогнутого отображения является нормальным отображением.

Отметим три простых свойства нормальной оболочки.

1) Если отображение a полунепрерывно сверху, то и отображение na полунепрерывно сверху.

2) Если отображение a гейловское, то и отображение na гейловское.

3) Если отображение a положительно однородно, то и отображение na положительно однородно.

Вогнутое отображение a конуса K_1 в $\Pi(K_2)$ назовем *вполне нормальным*, если график Z этого отображения таков, что $Z - (\{0\} \times K_2) \cap (K_1 \times K_2) = Z$.

Предложение 12.9. Вполне нормальное отображение замкнуто и нормально.

Указанное предложение в некоторых случаях допускает обращение.

Предложение 12.10. Пусть конусы K_1 и K_2 телесны, a — замкнутое нормальное отображение конуса K_1 в $\Pi(K_2)$, обла-

*) Определение пространства выпуклых множеств см., например, в работе Пинскера [1].

дающее тем свойством, что множество a (K_1) содержит внутреннюю точку конуса K_2 . Тогда отображение a вполне нормально.

Предложение 12.11. *Вполне замкнутое нормальное отображение является вполне нормальным.*

Ниже показано, что нормальное, полунепрерывное сверху, положительно однородное отображение вполне нормально (и, следовательно, замкнуто).

Пусть a — вогнутое отображение конуса K_1 в $\Pi(K_2)$ и Z — график этого отображения. Отображение $p_0 a$ назовем *вполне нормальной оболочкой* a , если его график Z_0 совпадает с пересечением всех подмножеств конуса $K_1 \times K_2$, содержащих Z и являющихся графиками вполне нормальных отображений.

Предложение 12.12. *Если a — вогнутое отображение, то отображение $p_0 a$ вполне нормально.*

Предложение 12.13. *График Z_0 вполне нормальной оболочки $p_0 a$ вогнутого отображения a имеет вид*

$$Z_0 = \overline{Z - (\{0\} \times K_2)} \cap (K_1 \times K_2),$$

где Z — график отображения a .

Будем теперь рассматривать (иногда не оговаривая этого особо) лишь вогнутые положительно однородные отображения конуса K_1 в $\Pi(K_2)$. Если a — такое отображение и Z — график отображения a , то *двойственный* к конусу Z конус Z^+ определим так же, как в конечномерном случае, формулой

$$Z^+ = \{(f, g) \in K_1' \times K_2' \mid f(x) \geq g(y) \text{ для любой пары } (x, y) \in Z\}.$$

Легко видеть, что Z^+ — выпуклый замкнутый в $X_1' \times X_2'$ конус. Заметим, что конус Z^+ непуст и, более того, $\text{Pr}_1 Z^+ = K_1'$. Отображение a' конуса K_1' в $\Pi(K_2')$, графиком которого является конус Z^+ , назовем *двойственным* по отношению к отображению a .

Предложение 12.14. *Отображение a' (конуса K_1' в $\Pi(K_2')$) вогнуто, положительно однородно и вполне нормально.*

Так как a' вогнуто и положительно однородно, то имеет смысл говорить об отображении, двойственном к a' . Это отображение мы будем обозначать символом a'' и называть *вторым двойственным* по отношению к a . По определению,

$$a''(x) = \{y \in K_2 \mid \forall f(x) \geq g(y) \text{ для любого } f \in K_1' \text{ и любого } g \in a'(f)\} \quad (x \in K_1).$$

Имеет место

Теорема 12.4. *Отображение, второе двойственное к отображению a , совпадает с вполне нормальной оболочкой a . Иными словами, $a'' = p_0 a$.*

Доказательство. Обозначим через Z и Z^{++} графики отображений a и a'' соответственно. Учитывая предложение 12.13, надо показать, что

$$Z^{++} = \overline{Z - (\{0\} \times K_2)} \cap (K_1 \times K_2).$$

Из предложения 12.14 следует, что

$$Z^{++} \supset \overline{Z - (\{0\} \times K_2)} \cap (K_1 \times K_2).$$

Покажем теперь, что справедливо обратное включение. Предполагая противное, найдем элемент (x, y) из конуса Z^{++} такой, что

$$(x, y) \notin \overline{Z - (\{0\} \times K_2) \cap (K_1 \times K_2)}.$$

Нетрудно проверить, что $(x, y) \notin \overline{Z - (\{0\} \times K_2)}$; учитывая, что множество $Z - (\{0\} \times K_2)$ является конусом, найдем функционал $(f, g) \in X'_1 \times X'_2$ такой, что

$$f(x) + g(y) < 0 = \inf_{(u, v) \in Z - (\{0\} \times K_2)} f(u) + g(v). \quad (12.1)$$

Из правой части (12.1) легко следует, что

$$f \in K'_1, -g \in K'_2, f(u) \geq -g(v) \quad ((u, v) \in Z). \quad (12.2)$$

Из (12.2) вытекает, что $(f, -g) \in Z^+$, и потому, учитывая, что $(x, y) \in Z^{++}$, получим $f(x) \geq -g(y)$, что противоречит левой части (12.1). Полученное противоречие и доказывает теорему.

Перейдем теперь к изучению двойственного и второго двойственного к полунепрерывному сверху отображению. Условимся совокупность всех полунепрерывных сверху, вогнутых, положительно однородных отображений конуса K_1 в $\Pi(K_2)$ обозначать символом $A_u(K_1, K_2)$.

Теорема 12.5. Если $a \in A_u(K_1, K_2)$, то $a'(K'_1) = K'_2$. При этом для любых x из K_1 и $g \in K'_2$

$$\sup_{x \in a(x)} g(x) = \inf_{f \in (a')^{-1}(g)} f(x).$$

Теорема 12.6. Если $a \in A_u(K_1, K_2)$, то $a'' = na$.

Доказательство можно провести, опираясь на теоремы 12.3 и 12.5 и используя тот же метод, что и при доказательстве теоремы 4.3.

Следствие 1. Если $a \in A_u(K_1, K_2)$ и a нормально, то a вполне нормально (u , следовательно, замкнуто).

Следствие 2. Если $a \in A_u(K_1, K_2)$, то и $a'' \in A_u(K_1, K_2)$.

Символом $A_v(K_1, K_2)$ обозначим совокупность всех вогнутых положительно однородных отображений a конуса K_1 в $\Pi(K_2)$, обладающих теми свойствами, что

1) $a(K_1) = K_2$,

2) для любого $f \in K_1$ функционал p_f :

$$p_f(y) = \inf_{x \in a^{-1}(y)} f(x) \quad (y \in K_2)$$

сублинеен и вполне положителен,

3) $0 \in a(x) \quad (x \in K_1)$.

Из теоремы 12.5 следует, что отображение a' , двойственное к отображению a из $A_u(K_1, K_2)$, принадлежит множеству $A_v(K'_1, K'_2)$. Действительно, в силу этой теоремы, $a'(K'_1) = K'_2$ и, кроме того, из соотношения

$$\inf_{f \in (a')^{-1}(g)} f(x) = \sup_{y \in a(x)} g(y)$$

следует, в силу теоремы 12.3, что для любого x из K_1 функционал p_x :

$$p_x(g) = \inf_{f \in (a')^{-1}(g)} f(x) \quad (g \in K'_2),$$

сублинеен и вполне положителен.

Имеет место

Теорема 12.7. Если $a \in A_v(K_1, K_2)$, то $a' \in A_u(K'_1, K'_2)$.
При этом

$$\inf_{x \in a^{-1}(y)} f(x) = \sup_{g \in a'(f)} g(y).$$

Теорема 12.8. Если $a \in A_u(K_1, K_2)$, то $a'' = \bar{a}$.

Приведем теперь результаты, относящиеся к произведению полунепрерывных сверху отображений.

Теорема 12.9. Пусть $a_i \in A_u(K_i, K_{i+1})$ ($i = 1, 2$) и, кроме того, для любого $x \in K_1$ множество $a_1(x)$ слабо компактно. Тогда $a_2 \circ a_1 \in A_u(K_1, K_3)$ и

$$(a_2 \circ a_1)' = \overline{a_2' \circ a_1'} \quad (12.3)$$

(здесь черта означает замыкание отображения в пространстве $X_1 \times X_3$).

Доказательство. Отображение $a_2 \circ a_1$ вогнуто и положительно однородно. Покажем, что оно полунепрерывно сверху. Пусть $h \in K'_3$. Рассмотрим функционал g_h :

$$g_h(x) = \sup_{z \in a_2 \circ a_1(x)} h(z) \quad (x \in K_1).$$

Используя теорему 12.5 и теорему о минимаксе, имеем

$$\begin{aligned} g_h(x) &= \sup_{z \in a_2(a_1(x))} h(z) = \sup_{y \in a_1(x)} \sup_{z \in a_2(y)} h(z) = \\ &= \sup_{y \in a_1(x)} \inf_{g \in (a_2')^{-1}(h)} g(y) = \inf_{g \in (a_2')^{-1}(h)} \sup_{y \in a_1(x)} g(y) = \\ &= \inf_{g \in (a_2')^{-1}(h)} \inf_{f \in (a_1')^{-1}(g)} f(x) = \inf_{f \in (a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)} f(x). \end{aligned} \quad (12.4)$$

Из формулы (12.4) следует, что функционал g_h полунепрерывен сверху. Это и означает, что отображение $a_2 \circ a_1$ полунепрерывно сверху.

Перейдем к доказательству формулы (12.3). Если $h \in K'_3$, то множество $(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)$ выпукло и K'_1 -устойчиво. Его замыкание (в X'_1) — множество $\overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)}$ — также выпукло и K'_1 -устойчиво; кроме того, используя (12.4), имеем

$$f \in \overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)} \implies f(x) = \inf_{f \in (a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)} f(x) = g_h(x) > -\infty.$$

Из сказанного следует, что множество $\overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}}(h)$ является K_1 -опорным и (теорема 12.2)

$$\overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}}(h) = U_{qh}.$$

С другой стороны, используя полунепрерывность сверху отображения $a_2 \circ a_1$, легко проверить, что

$$U_{qh} = ((a_2 \circ a_1)')^{-1}(h),$$

и потому

$$((a_2 \circ a_1)')^{-1}(h) = \overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}}(h). \quad (12.5)$$

Рассмотрим отображение $\overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}}$ — замыкание отображения $(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}$ в пространстве $X_3 \times X_1$. Непосредственно из определения замыкания и (12.5) вытекает, что для $h \in K_3$

$$\overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}}(h) \supset \overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}}(h) = ((a_2 \circ a_1)')^{-1}(h).$$

Снова используя определение замыкания и учитывая замкнутость отображения $((a_2 \circ a_1)')^{-1}$, получаем, что

$$((a_2 \circ a_1)')^{-1} = \overline{(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}},$$

откуда в свою очередь следует, что

$$(a_2 \circ a_1)' = \overline{((a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1})^{-1}}.$$

Для завершения доказательства осталось сослаться на равенство

$$\overline{((a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1})^{-1}} = \overline{a_2 \circ a_1},$$

справедливость которого проверяется непосредственно.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. Пусть отображения a_1 и a_2 удовлетворяют условиям теоремы и, кроме того, 1) a_1 и a_2 полунепрерывны сверху, 2) для любого $f \in K_1$ множества $a_1'(f)$ и $a_2 \circ a_1'(f)$ компактны (в X_2 и X_3 соответственно). Тогда $(a_2 \circ a_1)' = a_2 \circ a_1'$.

В самом деле, из полунепрерывности сверху отображений a_1' и a_2 и компактности $a_1'(f)$ следует полунепрерывность сверху отображения $a_2 \circ a_1'$. Используя компактность множества $a_2 \circ a_1'(f)$, нетрудно проверить, что это множество нормально. Следствие 1 из теоремы 12.6 показывает, что отображение $a_2 \circ a_1'$ замкнуто, откуда и следует наше утверждение.

С л е д с т в и е 2. Если множество $(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)$ замкнуто (в X_1) для любого $h \in K_3$, то отображение $a_2 \circ a_1'$ замкнуто.

Это утверждение мгновенно вытекает из формулы (12.5).

Прежде чем привести еще одно следствие из теоремы, дадим следующее определение. Пусть X_1 и X_2 — нормированные простран-

ва, K_1 и K_2 — выпуклые конусы в пространствах X_1 и X_2 соответственно. Положительно однородное отображение a конуса K_1 в $\Pi(K_2)$ назовем *ограниченным*, если

$$\sup_{x \in K_1, \|x\| \leq 1} \sup_{y \in a(x)} \|y\| < \infty.$$

С л е д с т в и е 3. Пусть в условиях теоремы пространства X_i ($i = 1, 2$) банаховы, отображение a'_1 ограничено (как отображение K_1^* в $\Pi(K_2^*)$). Тогда $(a_2 \circ a_1)' = a_2' \circ a_1'$.

Чтобы показать справедливость этого следствия, достаточно проверить, что для любого $h \in K_3'$ множество $(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)$ замкнуто в X_1 , а затем сослаться на следствие 2. Так как пространство X_1 банахово, то (см. Бурбаки [1]) множество $(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h)$ будет слабо замкнутым, если слабо замкнуто каждое из множеств

$$(a_1')^{-1} \circ (a_2')^{-1}(h) \cap \lambda S_1^* \quad (\lambda > 0), \quad (12.6)$$

где S_1^* — единичный шар пространства X_1^* .

Замкнутость множеств (12.6) легко проверить, используя ограниченность отображения a_1' .

В связи со следствием 3 представляет интерес следующее

П р е д л о ж е н и е 12.15. Пусть X_1 и X_2 — нормированные пространства, K_1 и K_2 — выпуклые замкнутые конусы в пространствах X_1 и X_2 соответственно, причем пространство X_2 полное, а конус K_2 воспроизводящий. Пусть, далее, a — вогнутое положительно однородное отображение конуса K_1 в $\Pi(K_2)$, обладающее тем свойством, что при некотором $\lambda > 0$

$$a(S_1^+) \supset \lambda S_2^+$$

(где $S_i^+ = \{x \in K_i \mid \|x\| \leq 1\}$ ($i = 1, 2$)).

Тогда отображение a'_1 ограничено (как отображение K_1^* в $\Pi(K_2^*)$).

Отметим еще справедливость следующего утверждения.

П р е д л о ж е н и е 12.16. Пусть a_i — полунепрерывное сверху, нормальное отображение конуса K_i в $\Pi(K_{i+1})$ ($i = 1, 2$), причем для любого x из K_1 множество $a_1(x)$ слабо компактно. Тогда отображение $a_2 \circ a_1$ вполне нормально (и, следовательно, нормально и замкнуто).

Справедливость предложения легко следует из следующей теоремы.

Т е о р е м а 12.10. Пусть $a_i \in A_v(K_i, K_{i+1})$ ($i = 1, 2$) и, кроме того, для любого $f \in K_1'$ множество $a_1'(f)$ компактно в K_2' . Тогда $a_2 \circ a_1 \in A_v(K_1, K_3)$ и $(a_2 \circ a_1)' = a_2' \circ a_1'$.

4. Определение регулярной модели. Теоремы о характеристике. В этом пункте под моделью экономической динамики понимается объект

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_\tau, t)_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\}.$$

Здесь приняты следующие обозначения: E — множество неотрицательных чисел, причем $0 \in E$, $\sup E = T \in E$, $T > 0$, $\bar{E} = \{(\tau, t) \in E \times E \mid \tau > t\}$, X_t — локально выпуклое пространство ($t \in E$), K_t — выпуклый замкнутый конус в пространстве X_t ($t \in \bar{E}$), $a_{\tau, t}$ — вогнутое положительно однородное замкнутое отображение конуса K_t в $\Pi(K_\tau)$ ($(\tau, t) \in \bar{E}$), причем 1) множество $a_{\tau, t}(x)$ слабо компактно для любого $x \in K_t$ ($(\tau, t) \in \bar{E}$), 2) $a_{t'', t'} \circ a_{t', t} = a_{t'', t}$ ($t'', t', t \in E$, $t'' > t' > t$).

Траекторией модели \mathfrak{M} называется семейство $\chi = (x_t)_{t \in E}$ такое, что а) $x_t \in K_t$ ($t \in E$), б) $x_\tau \in a_{\tau, t}(x_t)$ ($(\tau, t) \in \bar{E}$).

Теорема 12.11. Пусть $y_0 \in K_0$, $y_T \in a_{T, 0}(y_0)$. Тогда существует траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} такая, что $x_0 = y_0$, $x_T = y_T$.

Модель \mathfrak{M} назовем *регулярной*, если

$$(1) a_{\tau, t} \in A_u(K_t, K_\tau) \quad (t, \tau \in \bar{E}),$$

(2) объект

$$\mathfrak{M}' = \{E, (X_t')_{t \in E}, (K_t')_{t \in E}, (a'_{\tau, t})_{(\tau, t) \in \bar{E}}\}$$

является моделью экономической динамики.

Условие (2) выполняется тогда и только тогда, когда множества $a'_{\tau, t}(f)$ компактны (в X'_τ) при всех $f \in K'_t$ и, кроме того,

$$a'_{t'', t'} = a'_{t'', t'} \circ a'_{t', t} \quad (t'', t', t \in E, t'' > t' > t).$$

Заметим, что, в силу теоремы 12.9, последнее равенство имеет место в том и только том случае, когда отображение $a'_{t'', t'} \circ a'_{t', t}$ замкнуто.

Траекторию $\chi = (x_t)_{t \in E}$ регулярной моделью \mathfrak{M} назовем *слабо оптимальной*, если найдется функционал $f \in K'_T$ ($f \neq 0$) такой, что

$$f(x_T) = \max_{y \in a_{T, 0}(x_0)} f(y).$$

Про указанную траекторию будем говорить, что она исходит из точки x_0 и слабо оптимальна в смысле f . Из любой точки x конуса K_0 исходит слабо оптимальная траектория. С помощью модели \mathfrak{M}' можно, рассуждая так же, как в конечномерном случае, дать характеристику *) слабо оптимальных траекторий регулярной модели \mathfrak{M} .

Теорема 12.12. Пусть $x_0 \in K_0$, $f_T \in K'_T$ ($x_0 \neq 0$, $f_0 \neq 0$) и $\bar{\chi} = (\bar{x}_t)_{t \in E}$ — траектория модели \mathfrak{M} , исходящая из точки x_0 . Для того чтобы траектория $\bar{\chi}$ была слабо оптимальной в смысле функционала f_T , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось семейство $\Phi_\varepsilon = (f_t^\varepsilon)_{t \in E}$ ($f_t^\varepsilon \in K'_t$) такое, что

*) Характеристика определяется так же, как и в конечномерном случае.

1) для любой траектории $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} функция h_χ :

$$h_\chi(t) = f_t^e(x_t),$$

убывает,

$$2) h_\chi(0) - h_\chi(T) < \varepsilon,$$

$$3) f_t^e \neq 0 (t \in E), f_T^e = f_T.$$

Т е о р е м а 12.13. Пусть регулярная модель \mathfrak{M} такова, что конус K_0 телесен и x_0 — внутренняя точка K_0 . Тогда траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$, исходящая из x и слабо оптимальная в смысле функционала f_T ($f_T \in K_T^*$, $f_T \neq 0$), допускает характеристику $\bar{\varphi} = (\bar{f}_t)_{t \in E}$ такую, что $\bar{f}_T = f_T$.

Т е о р е м а 12.14. Пусть регулярная модель \mathfrak{M} такова, что отображение $a'_{T,0}$ полунепрерывно сверху. Для того чтобы траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ этой модели допускала характеристику, необходимо и достаточно, чтобы нашелся функционал f из конуса K_0^* такой, что

$$1) f(x_0) = \min_{y \in (na_{T,0})^{-1}(x_T)} f(y), \quad 2) a'_{T,0}(f_0) \neq \{0\}.$$

5. Модель, учитывающая различие фондов по сроку службы. В этом пункте мы приведем пример регулярной модели.

При рассмотрении конечномерных моделей (в частности, модели Неймана — Гейла) фонды и продукты не различались; точнее говоря, фонды описывались этими моделями тем же способом, что и продукты. В более точных моделях следует учитывать различие между фондами и продуктами. Дело в том, что фонды одного и того же вида в данный момент могут отличаться друг от друга, например, по структуре или по сроку службы (степени нестроенности) (см., например, Канторович и Горьков [1], Горьков [1]), и поэтому в более точных моделях следует учитывать не только общее количество фондов данного вида в данный момент, но и строение этих фондов.

Приведем модель, учитывающую различие фондов по сроку службы. Экономика, описываемая этой моделью, имеет дело с m видами фондов и n видами продуктов. Не умаляя общности, можно считать, что все виды фондов имеют одинаковый срок создания, скажем θ , и срок службы, скажем ω . Фонды i -го вида в момент t описываются двумя функциями ξ_i^t и η_i^t . Считаем, что $\xi_i^t \in L^2([0, \theta])$, $\eta_i^t \in L^2([0, \omega])$. Функцию ξ_i^t можно рассматривать как плотность распределения строящихся фондов вида i по степени нестроенности; если $0 \leq u_1 < u_2 \leq \theta$, то число $\int_{u_1}^{u_2} \xi_i^t(u) du$ показывает количество фондов этого вида, которым осталось строиться не более u_2 и не менее u_1 единиц времени. Функция η_i^t является плотностью распределения имеющихся в момент t фондов вида i по сроку службы;

если $0 \leq v_1 < v_2 \leq \omega$, то интеграл $\int_{v_1}^{v_2} \eta_i^t(v) dv$ равен количеству фондов, проработавших не более v_2 и не менее v_1 единиц времени.

Положим $\xi_t = (\xi_1^t, \dots, \xi_m^t)$, $\eta_t = (\eta_1^t, \dots, \eta_m^t)$. Через z_t обозначим n -мерный вектор, k -я координата которого показывает наличие k -го продукта в момент t ($k = 1, 2, \dots, n$).

Положим также $X = L_2^m([0, \theta]) \times L_2^m([0, \omega]) \times R^n$, где первые два сомножителя есть пространства вектор-функций, суммируемых с квадратом на соответствующих промежутках, а третий сомножитель — евклидово пространство. Считаем, что в X введена каким-либо способом норма, порождаемая топологией прямого произведения, и что X естественным образом упорядочено. Конус положительных элементов этого пространства обозначим через K .

Считаем, что рассматриваемая экономика функционирует на промежутке $[0, T]$. Пусть $0 \leq t < \tau \leq T$, и в момент t состояние экономики задано вектором $x_t = (\xi_t, \eta_t, z_t)$. Часть продуктов z_t может быть к моменту t переработана на имеющихся фондах η_t для построения новых фондов; срок службы имеющихся фондов при этом изменится на $\tau - t$; при этом часть фондов, полностью отработавших свой срок, списывается, но, с другой стороны, к имеющимся в момент t фондам добавляются вновь построенные; оставшаяся часть продуктов перерабатывается на имеющихся фондах в новый вектор продуктов. В результате экономика перейдет в новое состояние $x_\tau = (\xi_\tau, \eta_\tau, z_\tau)$. Указанный переход задается с помощью производственного отображения $a_{\tau, t}$, которое переводит конус K в $\Pi(K)$. Относительно этого отображения мы сделаем следующие предположения.

- 1) Отображение $a_{\tau, t}$ вогнуто, положительно однородно, замкнуто, и, кроме того, ограничено.
- 2) Если $x \in K$, то найдется элемент y из $a_{\tau, t}(x)$ такой, что

$$y \geq \lambda_{\tau, t} x, \quad (12.7)$$

где $\lambda_{\tau, t}$ — положительное число, не зависящее от x .

Смысл последнего предположения заключается в следующем: в период $[t, \tau]$ экономика может «ничего не делать», т. е. быть законсервированной. При этом имеющиеся фонды и продукты могут в некоторой степени «портиться».

Покажем теперь, что отображение $a_{\tau, t}$ вполне замкнуто (т. е. переводит каждый слабый компакт в слабый компакт). В самом деле, пусть ξ — слабо компактное подмножество конуса K . Из ограниченности отображения $a_{\tau, t}$ вытекает ограниченность множества $a_{\tau, t}(\xi)$; из вогнутости и замкнутости $a_{\tau, t}$ вытекает слабая замкнутость этого множества; наконец, из рефлексивности X следует, что это множество слабо компактно. Тем самым полная замкнутость отображения $a_{\tau, t}$ доказана.

Из сказанного вытекает, в частности, что это отображение непрерывно сверху (предложение 12.7) и для любого $x \in K$ множество $a_{\tau,t}(x)$ слабо компактно.

Экономические соображения подсказывают, что отображения $a_{\tau,t}$ должны удовлетворять условию согласования

$$a_{t'',t} = a_{t'',t'} \circ a_{t',t} \quad (0 \leq t < t' < t'' \leq T),$$

и потому наша экономика описывается моделью экономической динамики

$$\mathfrak{M} = \{[0, T], (X_t)_{0 \leq t \leq T}, (K_t)_{0 \leq t \leq T}, (a_{\tau,t})_{0 \leq t < \tau \leq T}\},$$

где $X_t = X$, $K_t = K$ ($0 \leq t \leq T$).

Покажем, что построенная модель регулярна. С этой целью отметим, что, как легко следует из (12.7) и предложения 12.15, отображение $a'_{\tau,t}$ ограничено (как отображение конуса K^* в $\Pi(K^*)$).

Привлекая теперь следствие 3 из теоремы 12.9, получим, что

$$a'_{t'',t'} \circ a'_{t',t} = a'_{t'',t} \quad (0 \leq t < t' < t'' \leq T).$$

Кроме того, для любого $f \in K^*$ множество $a'_{\tau,t}(f)$ ($0 \leq t < \tau \leq T$) слабо компактно. Тем самым и доказана регулярность модели \mathfrak{M} .

Для описания всех траекторий модели \mathfrak{M} , допускающих характеристику, может быть использована теорема 12.14. Однако условия этой теоремы в рассматриваемой ситуации трудно проверяемы. Воспользуемся поэтому теоремой 12.13, которая хотя и неприменима непосредственно к модели \mathfrak{M} , позволит описать важный класс траекторий, допускающих характеристику.

Введем следующее определение. Пусть ξ — подмножество конуса K , $f \in K^* \setminus \{0\}$. Траекторию $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} назовем слабо оптимальной относительно ξ , в смысле функционала f , если

$$f(x_T) = \max_{y \in a_{T,0}(\xi)} f(y)$$

и, кроме того, $x_0 \in \xi$.

Если ξ — слабо компактно, то, как следует из полной замкнутости отображения $a_{T,0}$, слабо оптимальные относительно ξ траектории существуют.

Имеет место

Т е о р е м а 12.15. Пусть ξ — выпуклое замкнутое ограниченное подмножество конуса K_0 такое, что $\xi \cap \lambda S_0^+$ при некотором $\lambda > 0$ (где $S_0^+ = \{x \in K_0 \mid \|x\| \leq 1\}$).

Пусть, далее, $f_T \in K^*$ ($f_T \neq 0$) и $\bar{\chi} = (\bar{x}_t)_{t \in E}$ — траектория модели \mathfrak{M} , слабо оптимальная относительно ξ в смысле функционала f_T . Тогда траектория $\bar{\chi}$ допускает характеристику $\bar{\varphi} = (\bar{f}_t)_{t \in E}$, обладающую тем свойством, что $\bar{f}_T = f_T$.

Доказательство. Наряду с моделью \mathfrak{M} рассмотрим объект

$$\mathfrak{M}^0 = \{E^0, (X_t^0)_{t \in E^0}, (K_t^0)_{t \in E^0}, (a_{\tau,t}^0)_{\tau,t \in \tilde{E}^0}\},$$

где $E^0 = \{-1\} \cup [0, T]$, $X_{-1}^0 = R^1$, $X_t^0 = X$ ($t \in [0, T]$), $K_{-1}^0 = R_+^1$, $K_t^0 = K$ ($t \in [0, T]$), $a_{0,-1}^0(\lambda) = \lambda \xi$ ($\lambda \in R_+^1$),

$$a_{\tau,-1}^0 = a_{\tau,0}^0 a_{0,-1}^0 \quad (\tau \in [0, T]), \quad a_{\tau,t}^0 = a_{\tau,t} \quad (0 \leq t < \tau \leq T).$$

Объект \mathfrak{M}^0 , вообще говоря, не является моделью, так как $\inf E^0 = -1$. Нетрудно, однако, проверить, что этот объект обладает всеми свойствами модели (кроме указанного), и потому, допуская вольность речи, мы будем называть его моделью экономической динамики. Нетрудно проверить, что отображение $a_{\tau,t}^0$ ($(\tau, t) \in \tilde{E}^0$) ограничено (как отображение конуса $(K_t^0)^*$ в $\Pi((K_\tau^0)^*)$). Привлекая следствие 3 из теоремы 12.9, убедимся в том, что модель \mathfrak{M}^0 регулярна.

Пусть $\bar{\chi}$ — траектория модели \mathfrak{M} , фигурирующая в теореме. Рассмотрим семейство $\bar{\chi}^0 = (\bar{x}_t^0)_{t \in E^0}$, где $\bar{x}_{-1}^0 = 1$, $\bar{x}_t^0 = \bar{x}_t$ ($t \in E$). Так как $\bar{x}_0 \in \xi = a_{0,-1}(1)$, то семейство $\bar{\chi}^0$ является траекторией модели \mathfrak{M}^0 ; так как

$$f_T(\bar{x}_T) = \max_{y \in a_{T,0}(\xi)} f_T(y) = \max_{y \in a_{T,-1}(1)} f_T(y),$$

то траектория χ_0 слабо оптимальна в смысле f_T . Поскольку точка 1 является внутренней точкой конуса K_{-1} то, в силу теоремы 12.13, траектория $\bar{\chi}^0$ допускает характеристику $\bar{\varphi}^0 = (\bar{f}_t)_{t \in E^0}$ такую, что $\bar{f}_T = f_T$. Семейство $\bar{\varphi} = (\bar{f}_t)_{t \in [0, T]}$ является характеристикой траектории $\bar{\chi}$.

Теорема доказана.

§ 13. ТЕОРЕМА О МАГИСТРАЛИ В СЛАБОЙ ФОРМЕ

1. Введение. В этом параграфе рассматриваются лишь модели Неймана — Гейла Z , имеющие состояние равновесия. Всюду, за исключением последнего пункта, ради удобства изложения, считаем, что модель Z правильна (т. е. $\text{Pr}_1 Z = R_+^n$). В этом случае совокупность всех траекторий модели Z совпадает с пучком траекторий технологической модели \mathfrak{R}_Z (см. п. 3 § 10)

$$\mathfrak{R}_Z = \{\{0, 1, 2, \dots\}, (X_t)_{t=0}^\infty, (K_t)_{t=0}^\infty, (a_{\tau,t})_{0 \leq t < \tau < \infty}\},$$

где $X_t = R^n$, $K_t = R_+^n$ ($t = 0, 1, \dots$), $a_{\tau,t} = a^{\tau-t}$ ($0 \leq t < \tau < \infty$) (здесь a — производственное отображение модели Z). Последний пункт посвящен произвольной модели Неймана — Гейла.

Несколько слов о смысле излагаемых далее результатов. Магистраль представляет собой траекторию (x_t) , которая, с одной стороны, оптимальна, а с другой стороны — стационарна в том смысле, что $p(x_{t+1})/p(x_t) = \alpha$ для некоторого положительного функционала p , числа α и всех t . Темп роста α на магистрали (x_t) характеризуется тем, что он является максимальным постоянным темпом роста, который экономическая система может выдержать сколь угодно долго. Если $((\bar{x}, \bar{y}), \alpha, \bar{p})$ — состояние равновесия нормальной модели Неймана — Гейла, то траектория $(\alpha^t \bar{x})_{t=0}^\infty$ является, очевидно, магистралью. Теоремы о магистрали утверждают, что всякая оптимальная траектория, не зависимо от начального состояния, стремится в том или ином смысле к магистрали. В частности, некоторые теоремы о магистрали можно рассматривать как теоремы об устойчивости состояния равновесия.

Переходим к формулировке точных определений.

2. Траектории, имеющие средний темп роста α . Пусть α — темп роста правильной модели Неймана — Гейла Z . Положим

$$\pi_\alpha = \{p > 0 \mid p \in \alpha a'(p)\}.$$

Множество π_α непусто; при этом $\pi_\alpha \cup \{0\}$ представляет собой выпуклый замкнутый конус. Нетрудно убедиться в том, что все функционалы из $g_i \pi_\alpha$ имеют одни и те же ненулевые координаты. Через G_α обозначим множество всех номеров i из $I = \{1, 2, \dots, n\}$, для которых $p^i > 0$ ($p \in g_i \pi_\alpha$). Отметим еще, что если $p \in \pi_\alpha$, то последовательность $\varphi_p = (p, \alpha^{-1}p, \dots, \alpha^{-t}p, \dots)$ является траекторией модели \mathfrak{R}_Z , двойственной к \mathfrak{R}_Z .

Будем говорить, что траектория $\chi = (x_t)$ модели Z (или, что то же самое, модели \mathfrak{R}_Z) имеет средний темп роста α , если эта траектория согласована с траекторией φ_p при некотором $p \in g_i \pi_\alpha$; иными словами, если

$$\lim \alpha^{-t} p(x_t) > 0 \quad (p \in g_i \pi_\alpha).$$

Траектория χ имеет средний темп роста α в том и только том случае, когда найдется индекс $i \in G_\alpha$, при котором $\overline{\lim} \alpha^{-t} x_t^i > 0$. Для $p \in g_i \pi_\alpha$ наряду с траекторией φ_p рассмотрим множество

$$(na)^{-1}(\varphi_p) = \bigcup_t \alpha^{-t} a^{-t}(p).$$

Из результатов п. 6 § 9 вытекает следующее

Предложение 13.1. Для того чтобы из точки x_0 исходила траектория, имеющая средний темп роста α , необходимо и достаточно, чтобы эта точка была согласована с траекторией φ_p при некотором $p \in g_i \pi_\alpha$, т. е. чтобы $\inf_{h \in (na)^{-1}(\varphi_p)} h(x_0) > 0$.

Следствие. Если $0 \leq x \leq y$ и из точки x исходит траектория, растущая средним темпом α , то и точка y обладает этим свойством.

Отметим еще, что если Z обладает состоянием равновесия вида $(\alpha, (x, \alpha x), p)$, то траектории, имеющие средний темп роста α , заведомо существуют.

Эти траектории в некотором смысле близки к оптимальным. Мы покажем это в простейшей ситуации.

Предложение 13.2. Пусть Z обладает состоянием равновесия $(\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$ таким, что $\bar{y} \gg 0$, $\bar{p} \gg 0$. Тогда, для того чтобы траектория $\chi = (x_t)$ имела средний темп роста α , необходимо и достаточно, чтобы она допускала согласование.

В доказательстве нуждается лишь достаточность. Пусть траектория $\varphi = (f_t)$ согласована с χ . Не умаляя общности, можно считать, что $f_0 \leq \bar{p}$. Положим *) $\xi = \bigcup_{t=1}^{\infty} \alpha^t (a')^t(\bar{p})$. Пусть $g \in \xi$; тогда $g \in \alpha^t (a')^t(\bar{p})$ при некотором натуральном t . Так как $\alpha^t \bar{x} \in a^t(\bar{x})$, то $g(\bar{x}) \leq \bar{p}(\bar{x})$. Из соотношения $\bar{x} \gg 0$ следует, что $\min_{\|h\|=1} h(\bar{x}) = m > 0$.

Таким образом,

$$\|g\| \leq \frac{1}{m} \frac{g}{\|g\|}(\bar{x}) \cdot \|g\| = \frac{1}{m} g(\bar{x}) \leq \frac{1}{m} \bar{p}(\bar{x}).$$

Мы показали, что множество ξ ограничено. Поскольку $\bar{p} \gg 0$, то найдется $\lambda > 0$, при котором $\xi \subset \lambda < 0, \bar{p}$. Отображение $(a')^t$ нормально и, стало быть, монотонно. Учитывая это обстоятельство и неравенство $f_0 \leq \bar{p}$, имеем

$$f_t \in (a')^t(f_0) \subset (a')^t(\bar{p}),$$

откуда следует соотношение

$$\alpha^t f_t \in \alpha^t (a')^t(\bar{p}) \subset \xi.$$

Таким образом, $\alpha^t f_t \leq \lambda \bar{p}$ при всех натуральных t . Так как траектория $\varphi = (f_t)$ согласована с траекторией $\chi = (x_t)$, то $\lim f_t(x_t) > 0$, стало быть, и $\lim \alpha^{-t} \bar{p}(x_t) > 0$.

Предложение доказано.

Следствие. В условиях предложения каждая траектория χ , допускающая характеристику, имеет средний темп роста α . В частности, каждая оптимальная траектория, исходящая из внутренней точки, обладает этим свойством.

3. Асимптотика траекторий, имеющих средний темп роста α . Асимптотику интересующих нас траекторий удобно изучать с помощью неймановской грани. Введем соответствующее определение. Пусть α — темп роста модели

*) Множество ξ является собственным множеством отображения a' .

Z. Для $p \in \pi_\alpha$ положим

$$H_p = \{(x, y) \in R^n \times R^n \mid \alpha p(x) = p(y)\}$$

(H_p есть гиперплоскость функционала $(\alpha p, -p)$). Если $(\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), p)$ — состояние равновесия, то луч $(\lambda(\bar{x}, \bar{y}))_{\lambda \geq 0}$ входит в H_p при любом $p \in \pi_\alpha$. Нетрудно проверить, что множество

$$N_\alpha = Z \cap \left(\bigcap_{p \in \pi_\alpha} H_p \right)$$

является гранью конуса Z. Это множество и называется *неймановской гранью* (отвечающей темпу роста α).

Предложение 13.3. Если $p \in \text{гг } \pi_\alpha$, то $N_\alpha = Z \cap H_p$.

Доказательство. Пусть $(x, y) \in Z \cap H_p$ и $p' \in \pi_\alpha$. Так как $p \in \text{гг } \pi_\alpha$, то $p - \delta p' \in \pi_\alpha$ при достаточно малом положительном δ . Имеем

$$p(y) = \alpha p(x), \quad (p - \delta p')(y) \leq \alpha (p - \delta p')(x),$$

откуда следует неравенство $p'(y) \geq \alpha p'(x)$. С другой стороны, из соотношения $p' \in \text{гг } \pi_\alpha$ вытекает, что $p'(y) \leq \alpha p'(x)$. Таким образом, $p'(y) = \alpha p'(x)$, т. е. $(x, y) \in H_{p'}$. Так как p' — произвольный элемент π_α , то

$$N_\alpha = Z \cap \left(\bigcap_{p' \in \pi_\alpha} H_{p'} \right) \supset Z \cap H_p.$$

Обратное включение очевидно.

Будем говорить,¹ что траектория $\chi = (x_t)$ ($x_t \neq 0$, $t = 0, 1, \dots$) модели Z *стремится к неймановской грани* N_α , если *)

$$\rho \left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha \right) \rightarrow 0.$$

*) Символом $\rho \left(\frac{(x, y)}{\|x\|}, L \right)$ обозначается расстояние от элемента $\frac{(x, y)}{\|x\|}$ пространства $R^n \times R^n$ до множества L в этом пространстве. (Считаем, что в R^n введена некоторая норма $\|\cdot\|$, которая индуцирует в $R^n \times R^n$ норму, скажем, $\|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$.) Заметим, что стремление траекторий к неймановской грани не зависит от того, каким именно образом введена норма в R^n . Иногда будем пользоваться этим обстоятельством и выбирать в рассматриваемых ситуациях норму, наиболее удобную с точки зрения этих ситуаций.

Для описания траекторий, стремящихся к грани N_α , нам понадобится следующее

Предложение 13.4. Пусть $x \in R^n$ и функционал $g \in (R^n)^*$ таков, что $g(x) \geq 0$, $g \neq 0$. Пусть, далее, $H = g^{-1}(0)$. Тогда

$$\rho(x, H) = \frac{g(x)}{\|g\|}.$$

Доказательство легко следует из теоремы Хана — Банаха. (Более общее утверждение доказано, например, в монографии Канторовича и Акилова [1], гл. IV, § 2.)

Предложение 13.5. Для того чтобы траектория $\chi = (x_t)$ стремилась к неймановской грани N_α , необходимо и достаточно, чтобы нашелся функционал p из $g_i \pi_\alpha$ такой, что

$$\frac{\alpha p(x_t) - p(x_{t+1})}{\|x_t\|} \rightarrow 0. \quad (13.1)$$

Доказательство. Пусть $p \in g_i \pi_\alpha$. Тогда, в силу предложения 4.3, $N_\alpha = H_p \cap Z$. Покажем, что траектория χ стремится к грани N_α тогда и только тогда, когда

$$\rho\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, H_p\right) \rightarrow 0. \quad (13.2)$$

Отметим прежде всего, что отображение a , графиком которого является конус Z , ограничено, и потому последовательность $\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}\right)$ имеет предельные точки. Соотношение

$$\rho\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha\right) = \rho\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, H_p \cap Z\right) \rightarrow 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда все предельные точки последовательности $\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}\right)$ принадлежат гиперплоскости H_p , или, иными словами, тогда и только тогда, когда выполнено (13.2). Привлекая предложение 13.4, в силу которого

$$\rho\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, H_p\right) = \frac{\alpha p(x_t) - p(x_{t+1})}{\|x_t\| \|(\alpha p, -p)\|},$$

убедимся, что для стремления траектории χ к неймановской грани, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\alpha p(x_t) - p(x_{t+1})}{\|x_t\|} \rightarrow 0.$$

Предложение доказано.

З а м е ч а н и е. Если хотя бы для одного функционала $p \in \text{гл}_\alpha$ выполняется соотношение (13.1), то оно имеет место и для всех p из гл_α .

Через $\tilde{\Gamma}_\alpha$ обозначим грань конуса R_+^n , натянутую на орты с номерами из G_α , через $\tilde{\tilde{\Gamma}}_\alpha$ — дизъюнктивное дополнение к $\tilde{\Gamma}_\alpha$. Для $x \in R^n$ положим

$$\tilde{x} = \text{Pr}_{\tilde{\Gamma}_\alpha} x, \quad \tilde{\tilde{x}} = \text{Pr}_{\tilde{\tilde{\Gamma}}_\alpha} x.$$

Вернемся к формуле (13.1). Если $p(x_\tau) = 0$ при некотором τ , то и $p(x_t) = 0$ при всех $t > \tau$. В этом случае процессы $\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}\right)$ ($t = \tau, \tau + 1, \dots$) лежат в неймановской грани. Предположим теперь, что $p(x_t) > 0$ при всех t . Не умаляя общности, можно считать, что норма в R^n введена так, что для $x \in R_+^n$

$$\|x\| = p(\tilde{x}) + \|\tilde{\tilde{x}}\|_0$$

(где $\|\cdot\|_0$ — какая-то норма в пространстве $\tilde{\tilde{\Gamma}}_\alpha = \tilde{\tilde{\Gamma}}_\alpha$). Используя это обстоятельство, перепишем (13.1) следующим образом:

$$\lim \left(\alpha - \frac{p(x_{t+1})}{p(x_t)} \right) \left(1 + \frac{\|\tilde{\tilde{x}}_t\|}{\|\tilde{x}_t\|} \right)^{-1} = 0. \quad (13.3)$$

Равенство (13.3) показывает, что, грубо говоря, стремление к неймановской грани вызывается двумя обстоятельствами. Траектория $\chi = (x_t)$ заведомо стремится к неймановской грани, если

$$\text{А) } \lim \frac{p(x_{t+1})}{p(x_t)} = \alpha \quad \text{или} \quad \text{Б) } \lim \frac{\|\tilde{\tilde{x}}_t\|}{\|\tilde{x}_t\|} = 0.$$

Из А) немедленно вытекает

Теорема 13.1. *Если траектория χ имеет средний темп роста α , то она стремится к грани N_α .*

Условие А) описывает траектории, в некотором смысле близкие к имеющим средний темп роста α . Условие же Б) по существу никак не связано со средним темпом роста траектории. Асимптотику траекторий, удовлетворяющих именно условию А), удобно описать с помощью неймановской грани не самой модели, а ее проекции.

Обозначим через \tilde{Z}_α замыкание проекции конуса Z на грань $\tilde{\Gamma}_\alpha \times \tilde{\Gamma}_\alpha$ конуса $R_+^n \times R_+^n$. (Напомним, что $\tilde{\Gamma}_\alpha$ — грань конуса R_+^n , натянутая на орты с номерами из G_α .)

Если $(x, y) \in \tilde{Z}_\alpha$, то для любого $p \in \text{г} \pi_\alpha$ выполняется $p(y) \leq \alpha p(x)$. Если, в частности, $x = 0$, то $p(y) = 0$, и потому $y^i = 0$ для всех $i \in G_\alpha$. Поскольку, кроме того, $y \in \tilde{\Gamma}_\alpha$, то $y^i = 0$ и для номеров $i \in I \setminus G_\alpha$. Таким образом, если $(x, y) \in \tilde{Z}_\alpha$ и $x = 0$, то $y = 0$. Отождествляя $\tilde{\Gamma}_\alpha$ с положительным ортантом R_+^m пространства R^m (где m — мощность G_α), нетрудно убедиться в том, что \tilde{Z}_α — модель Неймана — Гейла. Рассмотрим состояние равновесия $\sigma = (\alpha, (x, y), p)$ модели Z (здесь $p \in \text{г} \pi_\alpha$). По определению состояния равновесия, $\alpha x \leq y$ и, кроме того, $p(y) = \alpha p(x)$. Из сказанного вытекает, что $\alpha x^i = y^i$ для всех $i \in G_\alpha$, и, стало быть, элемент $(\tilde{x}, \alpha \tilde{x})$, где $\tilde{x} \in \text{Pr}_{\tilde{\Gamma}_\alpha} x$, входит в конус \tilde{Z}_α . Таким образом, $\tilde{\sigma} = (\alpha, (\tilde{x}, \alpha \tilde{x}), p)$ является состоянием равновесия модели \tilde{Z}_α , а α — темп роста этой модели.

Через \tilde{N}_α обозначим неймановскую грань модели \tilde{Z}_α , отвечающую темпу роста α . Применяя формулу (13.3) к траекториям модели \tilde{Z}_α , убедимся в справедливости следующего утверждения.

Предложение 13.6. *Для траектории $\chi = (x_i)$ модели Z соотношение*

$$\rho \left(\frac{(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1})}{\|\tilde{x}_t\|}, \tilde{N}_\alpha \right) \rightarrow 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда для некоторого (и следовательно, для любого) $p \in \text{г} \pi_\alpha$

$$\lim \frac{p(x_{t+1})}{p(x_t)} = \alpha.$$

Особенно просто описывается асимптотика траекторий модели Z , имеющей темп роста α такой, что $G_\alpha = I = \{1, 2, \dots, n\}$ (в этом случае $Z = \bar{Z}_\alpha$). Точнее говоря, имеет место

Т е о р е м а 13.2. Пусть темп роста α модели Z таков, что множество π_α содержит функционал $p \gg 0$. Тогда каждая траектория $\chi = (x_t)$ этой модели удовлетворяет по крайней мере одному из следующих двух условий:

$$1) \alpha^{-t} x_t \rightarrow 0, \quad 2) \rho \left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha \right) \rightarrow 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не умаляя общности, можно считать, что для $x \in R_+^n$

$$\|x\| = p(x).$$

Последовательность $(\alpha^{-t} p(x_t)) = (\alpha^{-t} \|x_t\|)$ убывает и потому имеет предел. Если $\lim \alpha^{-t} \|x_t\| > 0$, то, как следует из условия А), траектория χ стремится к грани N_α .

Теорема доказана.

В заключение этого пункта приведем

П р е д л о ж е н и е 13.7. Пусть модель Z обладает таким состоянием равновесия $(\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$, что $\bar{y} \gg 0$, $\bar{p} \gg 0$. Тогда каждая траектория этой модели, допускающая согласование, стремится к грани N_α .

Доказательство следует из предложения 13.2 и теоремы 13.1.

С л е д с т в и е. Каждая оптимальная траектория модели Z , исходящая из точки $x \gg 0$, стремится к грани N_α .

4. Асимптотика оптимальных конечных траекторий.

При описании асимптотики конечных траекторий роль предложения 13.5 играет следующая

Л е м м а 13.1 (лемма Мак-Кензи). Пусть α — темп роста модели Z . Для любого $\varepsilon > 0$ и $p \in \pi_\alpha$ найдется $\delta > 0$ такое, что $p(y) < (1 - \delta)\alpha p(x)$ для любого процесса $(x, y) \in Z$, удовлетворяющего условию

$$\rho \left(\frac{(x, y)}{\|x\|}, N_\alpha \right) \geq \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что лемма неверна. Тогда для любого натурального k найдется процесс $(x_k, y_k) \in Z$ такой, что $\|x_k\| = 1$, $\rho((x_k, y_k), N_\alpha) \geq$

$\geq \varepsilon$ и $p(y_k) \geq \frac{k-1}{k} \alpha p(x_k)$. Не умаляя общности, можно считать, что последовательность (x_k, y_k) сходится к процессу (x, y) . Процесс $(x, y) \in Z$ и $\rho((x, y), N_\alpha) \geq \varepsilon$. В то же время $p(y) = \alpha p(x)$, т. е. $(x, y) \in N_\alpha$.

Полученное противоречие и доказывает лемму.

Имеет место

Теорема 13.3 (о магистрали в слабой форме). Пусть α — темп роста модели Z , точка $x_0 > 0$ и функционал $f > 0$ удовлетворяют следующим условиям:

а) из точки x_0 исходит траектория $\bar{\chi} = (\bar{x}_t)$, растущая средним темпом α ,

б) найдутся положительные числа k', k'' и функционал $p \in \Pi_\alpha$ такой, что

$$k''p \leq f \leq k'p. \quad (13.4)$$

Пусть, далее, ε — произвольное положительное число. Тогда для любой конечной траектории $\chi_T = (x_t)_{t=0}^T$, исходящей из x_0 и оптимальной в смысле f , число процессов (x_t, x_{t+1}) таких, что $\rho\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha\right) \geq \varepsilon$, не превосходит некоторого числа L (не зависящего от длины траектории T).

Доказательство. Пусть m — число процессов (x_t, x_{t+1}) таких, что $\rho\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha\right) \geq \varepsilon$. Найдем по данному ε число δ , существование которого гарантируется леммой 13.1. Имеем (считая $p(x_t) / p(x_{t+1}) = \alpha$, если $p(x_{t+1}) = 0$)

$$\begin{aligned} p(x_T) &= \frac{p(x_T)}{p(x_0)} p(x_0) = \\ &= p(x_0) \frac{p(x_T)}{p(x_{T-1})} \dots \frac{p(x_1)}{p(x_0)} \leq p(x_0) \alpha^T (1 - \delta)^m, \end{aligned}$$

откуда $p(x_T) \alpha^{-T} \leq p(x_0) (1 - \delta)^m$.

Положим $c = \lim \alpha^{-t} p(x_t)$ (по условию, $c > 0$). Используя неравенства (13.4) и оптимальность траектории χ_T , получим

$$\begin{aligned} p(x_T) \alpha^{-T} &\geq \frac{1}{k'} f(x_T) \alpha^{-T} \geq \\ &\geq \frac{1}{k'} f(\bar{x}_T) \alpha^{-T} \geq \frac{k''}{k'} p(\bar{x}_T) \alpha^{-T} \geq \frac{k''}{k'} c. \end{aligned}$$

Итак,

$$(1 - \delta)^m \geq \frac{k''}{k'} \frac{c}{p(x_0)},$$

откуда

$$m \leq \ln \left(\frac{k''}{k'} \frac{c}{p(x_0)} \right) (\ln(1 - \delta))^{-1}.$$

Теорема доказана.

Приведем еще один вариант теоремы о магистрали в слабой форме.

Т е о р е м а 13.3'. Пусть α — темп роста модели Z , точка $x_0 > 0$ и функционал $f > 0$ удовлетворяют следующим условиям:

а) найдется индекс i такой, что $a_1) f^i > 0$, $a_2)$ существует траектория $\bar{x} = (\bar{x}_t)$, исходящая из точки x_0 , для которой $\lim \alpha^{-t} x_t^i > 0$;

б) найдутся положительное число k и функционал $p \in \pi_\alpha$ такие, что $f \leq kp$. Пусть, далее, ε — произвольное положительное число. Тогда для любой конечной траектории $x_T = (x_t)$, исходящей из x_0 и оптимальной в смысле f , число процессов (x_t, x_{t+1}) , для которых $\rho \left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha \right) \geq \varepsilon$, не превосходит некоторого числа L .

Доказательство этой теоремы может быть проведено с помощью тех же соображений, что и доказательство теоремы 13.3.

З а м е ч а н и е 1. Множество точек x_0 , для которых при некотором t выполняется условие $a_2)$, как правило, достаточно обширно. Так, например, если отображение a нормально и $(\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), p)$ — состояние равновесия, то для любой точки $x_0 \in (\mu \bar{x})_{\mu > 0} + R_+^n$ это условие выполнено.

З а м е ч а н и е 2. Теоремы 13.3 и 13.3' останутся справедливыми, если вместо $\rho \left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha \right)$ писать $\rho \left(\frac{(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})}{\|\bar{x}_t\|}, \tilde{N}_\alpha \right)$

(где \tilde{N}_α — неймановская грань модели \tilde{Z}_α).

З а м е ч а н и е 3. В случае, если x_0 — граничная точка конуса R_+^n , асимптотику оптимальных траекторий, исходящих из точки x_0 , можно несколько уточнить (см. п. 2 § 16).

5. Асимптотика при наличии строгого состояния равновесия. Состояние равновесия $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$ правильной модели Z называется *строгим*, если из равенства

$\bar{p}(y) = \alpha \bar{p}(x)$ ($(x, y) \in Z$) следует, что при некотором $\lambda > 0$
 $x = \lambda \bar{x}, y = \lambda \bar{y}$.

Отметим, что функционал \bar{p} , фигурирующий в этом определении, принадлежит внутренности конуса $(R_+^n)^*$ (т. е. $\bar{p} \gg 0$).

В самом деле, пусть наше утверждение неверно и $\bar{p}^i = 0$ при некотором $i \in I$. Так как модель Z правильна, то найдется процесс $(e_i, y) \in Z$ (где e_i есть i -й орт). По определению состояния равновесия, $\bar{p}(y) \leq \alpha \bar{p}(e_i) = = \alpha \bar{p}^i = 0$, откуда следует равенство $\bar{p}(y) = \alpha \bar{p}(e_i) = 0$. Так как σ — строгое состояние равновесия, то $(e_i, y) = = \lambda(x, \bar{y})$ и, стало быть, $\bar{p}(\bar{y}) = \bar{p}(y) = 0$, что невозможно.

Из соотношения $\bar{p} \gg 0$ вытекает равенство $\bar{y} = \alpha \bar{x}$. Таким образом, если σ — строгое состояние равновесия, то $\sigma = (\alpha, (x, \alpha x), \bar{p})$, где $\bar{p} \gg 0$.

Выпуклый конус Z , лежащий в прямом произведении $R_+^n \times R_+^n$, называется *почти строго выпуклым*, если для любых двух его элементов (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , не лежащих на одном луче, найдется элемент $(x_1 + x_2, y)$ из Z такой, что $y \gg y_1 + y_2$. Нетрудно проверить, что каждое состояние равновесия $\sigma = (\alpha, (x, \bar{y}), \bar{p})$ модели Неймана — Гейла, определяемой почти строго выпуклым конусом Z , является строгим состоянием равновесия этой модели. В самом деле, пусть процесс $(x, y) \in Z$ не лежит на луче $(\lambda(x, \bar{y}))_{\lambda > 0}$ и, кроме того, $p(y) = \alpha p(x)$. Поскольку, по определению состояния равновесия, $p(\bar{y}) = \alpha p(x)$, то и $p(y + \bar{y}) = \alpha p(x + \bar{x})$. Используя почти строгую выпуклость Z , найдем процесс $(x + \bar{x}, \tilde{y}) \in Z$ такой, что $\tilde{y} \gg y + \bar{y}$. Для этого процесса имеем

$$p(\tilde{y}) > p(y + \bar{y}) = \alpha p(x + \bar{x}),$$

что невозможно. Полученное противоречие и показывает строгость равновесия σ . Если модель Z имеет строгое состояние равновесия $\sigma = (\alpha, (x, \alpha x), \bar{p})$, то, как следует непосредственно из определения, неймановская грань N_α совпадает с лучом $(\lambda(x, \alpha x))_{\lambda > 0}$. Это обстоятельство позволяет доказать следующее.

Предложение 13.8. Если модель Z имеет строгое состояние равновесия $\sigma = (\alpha, (x, \alpha x), \bar{p})$ и траектория $\chi = (x_t)$ этой модели стремится к грани N_α , то $\frac{x_t}{\|x_t\|} \rightarrow \frac{x}{\|x\|}$.

Доказательство. При всех $t = 0, 1, 2, \dots$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha \right) &= \inf_{\lambda \geq 0} \left\| \frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|} - \lambda (\bar{x}, \alpha \bar{x}) \right\| = \\ &= \inf_{\lambda \geq 0} \left\| \left(\frac{x_t}{\|x_t\|} - \lambda \bar{x}, \frac{x_{t+1}}{\|x_t\|} - \lambda \alpha \bar{x} \right) \right\| \geq \inf_{\lambda \geq 0} \left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \lambda \bar{x} \right\| = \\ &= \inf_{\lambda \geq 0} \left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \lambda \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\|. \quad (13.5) \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что существует число λ_t такое, что

$$\left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \lambda_t \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| = \inf_{\lambda \geq 0} \left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \lambda \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\|.$$

Из условия предложения и оценки (13.5) следует соотношение

$$\left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \lambda_t \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| \rightarrow 0. \quad (13.6)$$

Оценим теперь разность между $\frac{x_t}{\|x_t\|}$ и $\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| &= \left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \lambda_t \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} + (\lambda_t - 1) \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| \leq \\ &\leq \left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \lambda_t \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| + |\lambda_t - 1| = \left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \lambda_t \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| + \\ &+ \left| \left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} \right\| - \left\| \lambda_t \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| \right| \leq 2 \left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \lambda_t \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\|. \end{aligned}$$

Привлекая формулу (13.6), убедимся в справедливости предложения.

Пусть $x, y \in R^n$. Величину $\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|$ уместно называть *угловым расстоянием* между x и y . Предложение 13.8 показывает, таким образом, что, при наличии строгого состояния равновесия, из стремления траектории к неймановской грани вытекает ее стремление к равновесному вектору в смысле углового расстояния.

Заметим, что утверждение, обратное предложению 13.8, неверно. В самом деле, предполагая, что модель Z имеет строгое состояние равновесия $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), \bar{p})$, рассмотрим траекторию $\chi = (x_t)$ этой модели, где $x_t = (\alpha/2)^t \bar{x}$. Траектория χ стремится к \bar{x} в смысле углового расстояния. В то же время $\frac{p(x_{t+1})}{p(x_t)} = \frac{\alpha}{2}$, и поэтому, как следует из предложения 13.6, χ не стремится к грани N_α .

Важнейшее свойство траекторий модели со строгим состоянием равновесия описывает следующая

Т е о р е м а 13.4. *Если модель Z имеет строгое состояние равновесия $(\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), \bar{p})$, то для каждой траектории $\chi = (x_t)$ этой модели существует предел $x = \lim \alpha^{-t} x_t$, причем $x = \lambda \bar{x}$ (где $\lambda \geq 0$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из свойств строгого состояния равновесия вытекает, что $p \gg 0$; поэтому, не умаляя общности, можно считать, что для $x \in R_+^n$

$$\|x\| = p(x).$$

Если траектория χ не имеет среднего темпа роста α , то $\lim \alpha^{-t} \|x_t\| = \lim \alpha^{-t} p(x_t) = 0$ и, стало быть, в этом случае теорема справедлива (число λ , фигурирующее в условии теоремы, в этой ситуации равно нулю).

Предположим теперь, что траектория χ имеет средний темп роста α . Тогда (теорема 13.1) χ стремится к неймановской грани, и потому (предложение 13.8)

$$\frac{x_t}{\|x_t\|} \rightarrow \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}.$$

Перепишем это соотношение в виде $\frac{\alpha^{-t} x_t}{\alpha^{-t} p(x_t)} \rightarrow \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$. Полагая $\mu = \lim \alpha^{-t} p(x_t)$, имеем

$$\alpha^{-t} x_t \rightarrow \frac{\mu}{\|\bar{x}\|} \bar{x},$$

что и требовалось доказать.

При наличии строгого состояния равновесия теоремы 13.3 и 13.3' (о магистрали в слабой форме) могут быть сформулированы в терминах углового расстояния. Поскольку в данном случае множество π_α содержит функционал $p \gg 0$, то формулировка этих теорем существенно упрощается. Приведем лишь аналог теоремы 13.3'.

Теорема 13.3''. Пусть $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), \bar{p})$ — строгое состояние равновесия модели Z и точка x_0 обладает следующим свойством: существуют индекс i и траектория $\bar{\chi} = (x_t)$, исходящая из x_0 , для которых $\lim \alpha^{-t} x_t^i > 0$. Тогда для любой конечной оптимальной траектории $\chi = (x_t)$, исходящей из x_0 , число состояний x_t , для которых $\left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| > \varepsilon$, не превосходит некоторого числа L .

Доказательство теоремы может быть проведено с помощью тех же рассуждений, что и доказательство теоремы 13.3, с той лишь разницей, что вместо леммы 13.1 используется следующая

Лемма 13.1' (Раднера). Пусть $(\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), \bar{p})$ — строгое состояние равновесия модели Z . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $p(y) \leq (1 - \delta)\alpha p(x)$, если $(x, y) \in Z$ и $\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| \geq \varepsilon$.

Доказательство леммы Раднера проводится тем же способом, что и доказательство леммы Мак-Кензи.

6. Асимптотика траекторий в произвольных моделях Неймана — Гейла. Пусть Z — некоторая (вообще говоря, неправильная) модель Неймана — Гейла и α — темп роста этой модели. Через π_α обозначим совокупность всех функционалов $p > 0$ таких, что $p(y) \leq \alpha p(x)$ для всех $(x, y) \in Z$. Если Z — правильная модель, то введенное определение совпадает с данным выше (см. п. 2).

Так же, как и в случае правильной модели, будем говорить, что траектория $\chi = (x_t)$ имеет средний темп роста α , если $\lim \alpha^{-t} p(x_t) > 0$ хотя бы для одного $p \in \pi_\alpha$. Покажем, что предел, о котором идет речь, в рассматриваемой ситуации существует. С этой целью наряду с моделью Z рассмотрим технологическую модель \mathfrak{M}_Z (см. п. 1 § 10), пучок траекторий которой совпадает с совокупностью всех траекторий модели Z . Напомним, что

$$\mathfrak{M}_Z = \{ \{0, 1, \dots\}, (X_t)_{t=0}^\infty, (K_t)_{t=0}^\infty, (a_\tau, t)_{0 \leq t < \tau < \infty} \},$$

где $K_0 = \text{Pr}_1 Z$, $K_t = \overline{a_t(\text{Pr}_1 Z) \cap \text{Pr}_1 Z}$ ($t = 1, 2, \dots$), $X_t = K_t - K_t$ ($t = 0, 1, \dots$); если $\tau > t$ и $x \in K_t$, то $a_{\tau, t}(x) = a^{\tau-t}(x) \cap \text{Pr}_1 Z$ (здесь a — производственное отображение модели Z).

Пусть $p \in \pi_\alpha$. Сужение функционала p на пространство X_t ($t = 0, 1, \dots$) обозначим через p_t . Функционал p_t положителен; кроме того, последовательность $\varphi_p = (p_0, \alpha^{-1}p_1, \dots, \alpha^{-t}p_t, \dots)$ является траекторией модели \mathfrak{M}'_Z , двойственной к \mathfrak{M}_Z . Если $\chi = (x_t)$ — траектория модели Z (или, что то же самое, модели \mathfrak{M}_Z), то $p(x_t) = p_t(x_t)$ ($t = 0, 1, \dots$), и потому предел $\lim \alpha^{-t}p(x_t)$ существует. Заметим, что траектория χ имеет средний темп роста α тогда и только тогда, когда эта траектория согласована с φ_p (где $p \in \text{ri } \pi_\alpha$).

Используя данные выше определения, нетрудно проверить, что доказательства всех результатов, приведенных в пп. 2—4 (за исключением предложения 13.2 и вытекающего из него предложения 13.7) остаются (с естественными изменениями) в силе и для произвольной (не обязательно правильной) модели Неймана — Гейла.

§ 14. ТЕОРЕМА О МАГИСТРАЛИ В СИЛЬНОЙ ФОРМЕ

1. Положительная граница нормального множества.

При некоторых дополнительных предположениях для модели Неймана — Гейла имеет место теорема о магистрали в сильной форме, которая утверждает, что процессы, составляющие конечную оптимальную траекторию, отклоняются от неймановской грани лишь в начале и конце промежутка планирования. Ниже будет показано, что справедливость теоремы о магистрали в сильной форме существенно зависит от сходимости последовательности итераций $\alpha^{-t}a^t(x_0)$ (где x_0 — точка, из которой исходят траектории, a — производственное отображение модели; здесь и всюду в этом параграфе сходимости множеств понимается в смысле метрики Хаусдорфа).

Для доказательства теоремы нам понадобится ввести в рассмотрение положительную границу нормального компакта и выяснить некоторые ее свойства. Пусть ξ — нормальное (в смысле R_+^n) телесное подмножество конуса R_+^n . Введем в R^n норму $\|\cdot\|_\xi$ (см. § 2), единичный шар которой совпадает с множеством ξ — ξ . Положительной границей компакта ξ назовем множество

$$\partial^+\xi = \{x \in R_+^n \mid \|x\|_\xi = 1\}.$$

Из предложения 2.11 следует, что элемент x входит в $\partial^+\xi$ тогда и только тогда, когда $x \in \xi$ и найдется функционал $f > 0$, для которого

$$f(x) = \max_{y \in \xi} f(y) > 0.$$

Непосредственно из определения вытекает замкнутость положительной границы нормального множества.

Имеет место

Предложение 14.1. Пусть последовательность телесных нормальных множеств (ξ_n) сходится к телесному нормальному множеству ξ . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $n > N$

$$\partial^+\xi_n \subset \partial^+\xi + \varepsilon S \quad (\text{где } S = \{x \in R^n \mid \|\bar{x}\| \leq 1\}).$$

Доказательство. Предположим, что предложение неверно. Тогда можно считать, не умаляя общности, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$\partial^+\xi_n \not\subset \partial^+\xi + \varepsilon_0 S \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Найдем последовательность (x_n) , для которой выполняются соотношения

$$x_n \in \partial^+\xi_n, \quad (14.1)$$

$$x_n \notin \partial^+\xi + \varepsilon_0 S.$$

Так как $x_n \in \partial^+\xi_n$, то найдутся функционалы $f_n > 0$ такие, что $\|f_n\|_{\xi} = 1$ и

$$f_n(x_n) = \max_{x \in \xi_n} f_n(x) \quad (14.2)$$

(здесь $\|f\|_{\xi} = \max_{\|y\|_{\xi} \leq 1} f(y)$). В силу замечания к предложению 2.11 для $f > 0$ выполняется $\|f\|_{\xi} = \max_{y \in \xi} f(y)$. Не умаляя общности, считаем, что существуют пределы $\lim x_n = x$, $\lim f_n = f$. Так как $x_n \in \partial^+\xi_n \subset \xi_n$ и $\xi_n \rightarrow \xi$, то $x \in \xi$, т. е. $\|x\|_{\xi} \leq 1$. Так как $\|f_n\|_{\xi} = 1$, то и $\|f\|_{\xi} = 1$. На единичной сфере $S_{\xi}^* = \{g \in (R_+^n)^* \mid \|g\|_{\xi} = 1\}$ определим функционалы p_n ($n = 1, 2, \dots$) и p , положив для $g \in S_{\xi}^*$

$$p_n(g) = \max_{y \in \xi_n} g(y) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad p(g) = 1;$$

иными словами, $p(g) = \|g\|_{\xi} = \max_{y \in \xi} g(y)$. Так как $\xi_n \rightarrow \xi$ по метрике Хаусдорфа, то (см. предложение 3.9) p_n равномерно

стремится к p , откуда вытекает соотношение $p_n(f_n) \rightarrow p(f) = 1$. Используя формулу (14.2), имеем

$$f(x) = \lim f_n(x_n) = \lim p_n(f_n) = p(f) = \max_{y \in \xi} f(y).$$

Из написанных соотношений и неравенства $\|x\|_{\xi} \leq 1$ следует, что $\|x\|_{\xi} = 1$, т. е. $x \in \partial^+ \xi$, а это противоречит (14.1). Полученное противоречие и доказывает предложение.

Рассмотрим теперь нормальное отображение $a: R_+^n \rightarrow \Pi(R_+^n)$. Пусть $\chi = (x_t)_{t=0}^T$ — конечная траектория модели Неймана — Гейла Z , порождаемой этим отображением, исходящая из внутренней точки x_0 конуса R_+^n . Как следует непосредственно из определений, траектория χ оптимальна тогда и только тогда, когда $x_T \in \partial^+(a^T(x_0))$. Кроме того, в силу принципа оптимальности, из включения $x_T \in \partial^+(a^T(x_0))$ следует соотношение $x_t \in \partial^+(a^t(x_0))$ ($t = 1, 2, \dots, T$).

Нам понадобится еще одно определение. Пусть ξ — нормальное телесное множество в R_+^n . Конечную траекторию $\chi = (x_t)_{t=0}^T$ модели Z , рассмотренной выше, назовем ξ -оптимальной^{*}, если $x_0 \in \xi$, $x_T \in \partial^+(a^T(\xi))$. Траекторию $\chi = (x_t)$ этой модели назовем ξ -оптимальной, если T -кусоч χ при любом натуральном T является ξ -оптимальным. Нетрудно проверить, что для конечных ξ -оптимальных траекторий верен принцип оптимальности. (Это можно показать с помощью тех же рассуждений, что и при доказательстве теоремы 11.1, более того, поскольку рассматриваемое отображение a суперлинейно, то эти рассуждения можно существенно упростить.)

Символом $\mathfrak{X}_T^a(\xi)$ обозначим множество тех элементов, содержащихся в ξ , из которых исходит хотя бы одна T -шаговая ξ -оптимальная траектория. Таким образом, по определению,

$$\mathfrak{X}_T^a(\xi) = a^{-T}(\partial^+ a^T(\xi)) \cap \xi. \quad (14.3)$$

При всех натуральных T

$$\mathfrak{X}_T^a(\xi) \subset \partial^+ \xi.$$

^{*}) В более общей ситуации ξ -оптимальная траектория была определена ранее в § 12.

Кроме того, как непосредственно следует из принципа оптимальности,

$$\mathcal{X}_1^a(\xi) \supset \mathcal{X}_2^a(\xi) \supset \dots \supset \mathcal{X}_T^a(\xi) \supset \dots$$

Через $\mathcal{X}^a(\xi)$ обозначим совокупность тех элементов, содержащихся в ξ , из которых исходит хотя бы одна ξ -оптимальная траектория. Используя канторовский диагональный процесс, легко проверить, что

$$\mathcal{X}^a(\xi) = \bigcap_T \mathcal{X}_T^a(\xi).$$

Используя формулу (14.3), нетрудно убедиться в компактности множеств $\mathcal{X}_T^a(\xi)$ ($T = 1, 2, \dots$); отсюда непосредственно вытекает, что $\mathcal{X}^a(\xi)$ непусто. Заметим также, что, в силу предложения 3.8,

$$\mathcal{X}_T^a(\xi) \rightarrow \mathcal{X}^a(\xi). \quad (14.4)$$

2. Формулировка теоремы о магистрали в сильной форме. Леммы. Наша цель заключается в доказательстве следующей теоремы.

Т е о р е м а 14.1 Пусть a — нормальное суперлинейное отображение конуса R_+^n в $\Pi(R_+^n)$, причем

1) существует телесный выпуклый компакт ξ , для которого $\alpha\xi = a(\xi)$, где α — темп роста модели Z , порождаемой отображением a ,

2) найдется функционал p из $g_1 \pi_\alpha$, принимающий на множестве $\mathcal{X}^a(\xi)$ постоянное значение.

Тогда если точка $x_0 \in R_+^n$ такова, что $\lim \alpha^{-t} a^t(x_0) = \xi$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные числа L_1 и L_2 , обладающие следующим свойством: для всякой конечной оптимальной траектории $(x_t)_{t=0}^T$, $T > L_1 + L_2$, исходящей из точки x_0 , выполняется

$$\rho \left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha \right) \leq \varepsilon,$$

если $L_1 < t < T - L_2$.

З а м е ч а н и е 1. Если модель Z , порожденная отображением a , имеет состояние равновесия $(\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), p)$, где $p \geq 0$, $\bar{x} \geq 0$, то телесный выпуклый компакт ξ , удовлетворяющий условию $\alpha\xi = a(\xi)$, заведомо существует (см. § 7).

З а м е ч а н и е 2. Так как отображение $\alpha^{-1}a$ непрерывно (см. предложение 7.1), то из существования предела у последовательности $(\alpha^{-t}a^t(x_0))$ вытекает, что этот предел является собственным множеством отображения a , отвечающим собственному числу α .

Не умаляя общности, считаем в дальнейшем, что $\alpha = 1$ (в противном случае вместо отображения a можно рассмотреть отображение $\alpha^{-1}a$).

Положим $b_t = a^t(x_0)$ ($t = 1, 2, \dots$). Так как $b_t \rightarrow \xi$ и множество ξ телесно, то, начиная с некоторого номера, каждое из множеств b_t телесно. Будем считать, что телесны все множества $b_1, b_2, \dots, b_t, \dots$. Положим также

$$x_k^a(b_t) = b_t^k \quad (t, k = 1, 2, \dots).$$

Заметим, что $a^k(b_t) = a^{t+k}(x_0)$. Это позволяет сформулировать определение b_t^k в несколько иных терминах; а именно, b_t^k совпадает с множеством точек x из b_t , обладающих следующим свойством: найдется оптимальная траектория $\chi = (x_\tau)_{\tau=0}^{t+k}$, исходящая из x_0 и такая, что $x = x_t$. Доказательство теоремы 14.1 опирается на следующие леммы.

Л е м м а 14.1 Для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число T_k такое, что при $t \geq T_k$

$$b_t^k \subset (a^{-k}(\partial^+\xi) \cap \xi) + \varepsilon S \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где S — единичный шар пространства R^n .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем прежде всего, что по данному ε найдется $\varepsilon_1 > 0$, для которого *)

$$a^{-k}(\partial^+\xi + \varepsilon_1 S) \cap (\xi + \varepsilon_1 S) \subset (a^{-k}(\partial^+\xi) \cap \xi) + \varepsilon S. \quad (14.5)$$

Предполагая противное, найдем для любого n элемент y_n такой, что

$$\left. \begin{aligned} y_n \in \left[a^{-k} \left(\partial^+\xi + \frac{1}{n} S \right) \right] \cap \left(\xi + \frac{1}{n} S \right), \\ y_n \notin ((a^{-k}(\partial^+\xi) \cap \xi) + \varepsilon S). \end{aligned} \right\} \quad (14.6)$$

Не умаляя общности, считаем, что $y_n \rightarrow y$. Тогда, как нетрудно проверить, первое из соотношений (14.6) показывает, что y принадлежит множеству $a^{-k}(\partial^+\xi) \cap \xi$, а

*) Под символом $a^{-k}(\partial^+\xi + \varepsilon_1 S)$ понимается множество $a^{-k}((\partial^+\xi + \varepsilon_1 S) \cap R_+^n)$.

второе, что y не принадлежит этому множеству. Таким образом, наше предположение неверно, т. е. включение (14.5) имеет место при некотором $\varepsilon_1 > 0$.

Так как $b_t \rightarrow \xi$, то $b_t \subset \xi + \varepsilon_1 S$ при всех t , больших некоторого числа T' . Кроме того, из предложения 14.1 вытекает включение

$$\partial^+ b_t \subset \partial^+ \xi + \varepsilon_1 S \quad (14.7)$$

при всех t , больших некоторого числа T'' . При $t > T''$ справедливо соотношение

$$a^{-k}(\partial^+ b_t) \subset a^{-k}(\partial^+ \xi + \varepsilon_1 S). \quad (14.8)$$

Из (14.5), (14.7) и (14.8) вытекает*), что число, равное $\max(T', T'' + k)$ является искомым.

Лемма доказана.

Для произвольного числа $\delta \in (0, 1)$ и функционала $p > 0$ положим

$$Q(\delta, t) = \{x \in b_t \mid p(x) \geq (1 - \delta) \max_{y \in b_t} p(y)\} \quad (t = 1, 2, \dots), \quad (14.9)$$

$$Q(\delta) = \{x \in \xi \mid p(x) \geq (1 - \delta) \max_{y \in \xi} p(y)\}. \quad (14.10)$$

Л е м м а 14.2. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(\delta, t) = Q(\delta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$c_t = \max_{y \in b_t} p(y) \quad (t = 1, 2, \dots), \quad c = \max_{y \in \xi} p(y).$$

Так как $b_t \rightarrow \xi$, то $c_t \rightarrow c$. Множества $Q(\delta, t)$ компактны; кроме того, последовательность $(Q(\delta, t))$ ограничена. В силу теоремы Бляшке из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(Q(\delta, t_k))$. Покажем, что множество $\eta = \lim Q(\delta, t_k)$ совпадает с $Q(\delta)$. Пусть $x \in \eta$. Тогда найдется последовательность (x_{t_k}) такая, что $x_{t_k} \in Q(\delta, t_k)$ и $x_{t_k} \rightarrow x$. Поскольку $Q(\delta, t_k) \subset b_{t_k}$, то и $x_{t_k} \in b_{t_k}$, откуда следует, что $x \in \xi$. Кроме того, $p(x_{t_k}) \geq (1 - \delta)c_{t_k}$ и потому $p(x) \geq (1 - \delta)c$.

*) Здесь использована формула $b_t^k = a^{-k}(\partial^+ b_{t+k}) \cap b_t$.

Таким образом, $x \in Q(\delta)$ и, стало быть, $\eta \subset Q(\delta)$. Пусть теперь точка $z \in \xi$ такова, что $p(z) > (1 - \delta)c$. Так как $z \in \xi$, то найдется последовательность (z_{t_k}) , обладающая тем свойством, что $z_{t_k} \in b_{t_k}$ и $z_{t_k} \rightarrow z$. Положим $\varepsilon = p(z) - (1 - \delta)c$ и найдем номер K такой, что при $k > K$ выполняются соотношения

$$(1 - \delta)c > (1 - \delta)c_{t_k} - \frac{\varepsilon}{2}, \quad p(z_{t_k}) > p(z) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Имеем при $k > K$

$$p(z_{t_k}) > p(z) - \frac{\varepsilon}{2} = (1 - \delta)c + \frac{\varepsilon}{2} > (1 - \delta)c_{t_k}.$$

Таким образом, для рассматриваемых номеров k

$$z_{t_k} \in Q(\delta, t_k),$$

откуда вытекает включение $z \in \eta$.

Мы показали, что множество $\{z \in \xi \mid p(z) > (1 - \delta)c\}$ содержится в η . Так как множество η замкнуто, то и $Q(\delta) = \{z \in \xi \mid p(z) \geq (1 - \delta)c\}$ содержится в η . Поскольку η — произвольная предельная точка последовательности $(Q(\delta, t))$, то эта последовательность сходится и $\lim Q(\delta, t) = Q(\delta)$.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 14.1. Рассмотрим собственное множество ξ , фигурирующее в условии теоремы. Используя формулу (14.3), получим

$$\mathfrak{X}_k^a(\xi) = a^{-k}(\partial^+\xi) \cap \xi \quad (k = 1, 2, \dots),$$

и потому, как вытекает из (14.4),

$$a^{-k}(\partial^+\xi) \cap \xi \rightarrow \mathfrak{X}^a(\xi). \quad (14.11)$$

Выберем достаточно малое положительное число ν и, используя (14.11), найдем номер k_0 , при котором

$$a^{-k_0}(\partial^+\xi) \cap \xi \subset \mathfrak{X}^a(\xi) + \frac{\nu}{4}S,$$

где S , как и раньше, единичный шар пространства R^n . По лемме 14.1 при достаточно больших t

$$b_{t^{k_0}} \subset (a^{-k_0}(\partial^+\xi) \cap \xi) + \frac{1}{4}\nu S,$$

и потому при этих t

$$b_t^{k_0} \subset \mathfrak{X}^a(\xi) + \frac{1}{2} \nu S. \quad (14.12)$$

Рассмотрим теперь функционал p , фигурирующий в условии 2) теоремы, и с помощью этого функционала построим по формулам (14.9) и (14.10) множества $Q(\nu, t)$ и $Q(\nu)$. Покажем, что при всех t

$$(Q(\nu, t) + \nu S) \cap b_t \subset Q\left(\nu \left(1 + \frac{\|p\|}{c_t}\right), t\right) \quad (14.13)$$

(где c_t определено, так же как и при доказательстве леммы 14.2, формулой $c_t = \max_{y \in b_t} p(y)$). В самом деле, если x

принадлежит множеству, стоящему в левой части включения (14.13), то $x = x_1 + x_2$, где

$$p(x_1) \geq (1 - \nu)c_t, \quad p(x_2) \geq -\nu \|p\|.$$

Таким образом,

$$p(x) \geq \left[1 - \nu \left(1 + \frac{\|p\|}{c_t}\right)\right] c_t,$$

откуда и вытекает (14.13).

Будем считать в дальнейшем, что функционал p нормирован так, что $\|p\| = c = \max_{y \in \xi} p(y)$. Поскольку, как отмечалось при доказательстве леммы 14.2, $c_t \rightarrow c$, то $1 + \frac{\|p\|}{c_t} \leq 3$ при достаточно больших t . Для таких t , как следует из (14.13),

$$(Q(\nu, t) + \nu S) \cap b_t \subset Q(3\nu, t). \quad (14.14)$$

Отметим еще, что из условия 2) теоремы вытекает включение

$$\mathfrak{X}^a(\xi) \subset Q(\nu). \quad (14.15)$$

Привлекая лемму 14.2, в силу которой при достаточно больших t выполняется $Q(\nu) \subset Q(\nu, t) + \frac{1}{2} \nu S$, и используя формулы (14.14) и (14.15), имеем для номеров t , больших некоторого t' ,

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{X}^a(\xi) + \frac{1}{2} \nu S\right) \cap b_t &\subset \left(Q(\nu) + \frac{1}{2} \nu S\right) \cap b_t \subset \\ &\subset (Q(\nu, t) + \nu S) \cap b_t \subset Q(3\nu, t). \end{aligned}$$

Привлекая теперь (14.12), убедимся в следующем: найдутся натуральные T_0 и k_0 такие, что при всех $t \geq T_0$

$$b_t^{k_0} \subset Q(3v, t). \quad (14.16)$$

Выберем теперь произвольное положительное число $\varepsilon > 0$ и, используя лемму 13.1, найдем число $\delta > 0$, обладающее тем свойством, что $p(y) < (1 - \delta)p(x)$ для любого процесса $(x, y) \in Z$, удовлетворяющего условию $\rho\left(\frac{(x, y)}{\|x\|}, N_\alpha\right) \geq \varepsilon$. Положим в формуле (14.16) $v = \frac{1}{3}\delta^2$; таким образом, при $t \geq T_0$ справедливо включение

$$b_t^{k_0} \subset Q(\delta^2, t).$$

Поскольку последовательность $(c_t) = (\max_{y \in b_t} p(y))$ сходится, то число T_0 можно считать настолько большим, что при $t > T_0$ выполняется неравенство

$$\max_{y \in b_t} p(y) \leq (1 + \delta) \max_{y \in b_{t+1}} p(y).$$

Рассмотрим конечную траекторию $\chi = (x_t)_{t=0}^T$, длина которой T превышает $T_0 + k_0$. Пусть $T - k_0 > t > T_0$.

Предполагая, что $\rho\left(\frac{x_{t-1}, x_t}{\|x_{t-1}\|}, N_\alpha\right) \geq \varepsilon$, имеем

$$\begin{aligned} p(x_t) &< (1 - \delta)p(x_{t-1}) \leq \\ &\leq (1 - \delta) \max_{y \in b_{t-1}} p(y) \leq (1 - \delta^2) \max_{y \in b_t} p(y). \end{aligned}$$

Таким образом, $x_t \notin Q(\delta^2, t)$ и, стало быть, $x_t \notin b_t^{k_0}$. По определению,

$$b_t^{k_0} = \mathfrak{X}_{k_0}^a(b_t) = a^{-k_0}(\partial^+ b_{t+k_0}) \cap b_t.$$

Так как $x_t \in b_t$ и $x_t \notin b_t^{k_0}$, то $x_t \notin a^{-k_0}(\partial^+ b_{t+k_0})$. Последнее означает, что $a^{k_0}(x_t) \cap \partial^+ b_{t+k_0} = \emptyset$, т. е. из точки x_t нельзя выйти за k_0 шагов на положительную границу множества $b_{t+k_0} = a^{t+k_0}(x_0)$; в частности, $x_{t+k_0} \notin \partial^+ a^{t+k_0}(x_0)$ и, следовательно, $(t + k_0)$ -шаговая траектория $(x_\tau)_{\tau=0}^{t+k_0}$ не оптимальна. Тем более и исходная траектория $\chi = (x_\tau)_{\tau=0}^T$ не оптимальна. Итак, наше предположение влечет неоптимальность траектории χ ; стало быть, для

любой оптимальной конечной траектории $(x_t)_{t=0}^T$ ($T > T_0 + k_0$) выполняется

$$\rho\left(\frac{(x_{t-1}, x_t)}{\|x_{t-1}\|}, N_\alpha\right) < \varepsilon \quad (T - k_0 > t > T_0).$$

Теорема доказана.

4. Некоторые замечания. Приведем некоторые замечания к теореме 14.1

З а м е ч а н и е 1. Рассмотрим модель Z , обладающую состоянием равновесия $(\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), \bar{p})$, где $\bar{x} \gg 0$, $\bar{p} \gg 0$. Как уже отмечалось выше, эта модель имеет телесный собственный компакт, отвечающий собственному числу α . Применительно к модели Z теорема в сильной форме доказана при двух предположениях. Во-первых, считалось, что существует $\lim \alpha^{-t} a^t(x_0) = \xi$ (при этом ξ автоматически является собственным компактом); во-вторых, предполагалось, что указанный компакт ξ обладает тем свойством, что для некоторого $p \in \text{int } \pi_\alpha$ выполняется $p(x) = \text{const}$ ($x \in \xi^a(\xi)$). Следующие ниже примеры показывают, что каждое из этих предположений существенно.

П р и м е р 1. Рассмотрим подмножества ξ_1 и ξ_2 конуса R_+^2 , определенные формулами (рис. 26)

$$\xi_1 = \{x \in R_+^2 \mid 2x^1 + x^2 \leq 1\},$$

$$\xi_2 = \{x \in R_+^2 \mid x^1 + 2x^2 \leq 1\}.$$

Для $x \in R_+^2$ положим *)

$$a(x) = x^1 \xi_1 + x^2 \xi_2.$$

Легко проверить, что $(\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), \bar{p})$, где $\alpha = 1$, $\bar{p} = (1, 1)$, $\bar{x} = (1, 1)$, является состоянием равновесия модели Z , порожденной отображением a . Рассмотрим точки $x' = (1, 0)$, $x'' = (0, 1)$. Очевидно, что $a(x') = \xi_1$, $a(x'') = \xi_2$, заметим еще, что $a(\xi_1) = \xi_2$, $a(\xi_2) = \xi_1$. Из сказанного следует, что последовательность $a^t(x')$ не сходится. Пусть T — произвольное натуральное число. Рассмотрим траекторию $\chi = (x_t)_{t=0}^{4T}$ модели Z , где $x_{2\tau} = x'$, $x_{2\tau+1} = x''$ ($\tau = 0, 1, \dots, T-1$), $x_t = \frac{1}{3} x$ ($t = 2T, 2T+1, \dots, 4T$). Так как $\frac{1}{3} x \in \partial^+(a^{4T}(x')) = \partial^+ \xi_2$, то траектория χ

*) Это отображение рассматривал Р. Рокафеллар [1].

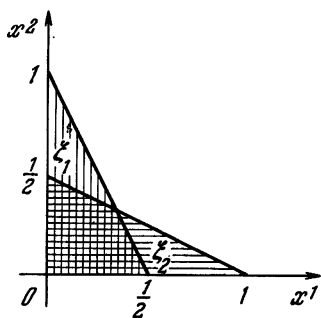


Рис. 26.

оптимальна. Заметим, что $p(x') = p(x'')$, поэтому процессы (x_t, x_{t+1}) ($t = 1, 2, \dots, 2T - 2$) лежат в грани N_α . Кроме того, $(x_t, x_{t+1}) \in N_\alpha$ при $t = 2T, 2T + 1, \dots, 4T - 1$. Процесс же $(x'', \frac{1}{3}x) = (x_{2T-1}, x_{2T})$ грани N_α не принадлежит. Так как T произвольно и процесс (x_{2T-1}, x_{2T}) лежит посередине траектории, то в рассматриваемом случае теорема о магистрали в сильной форме не имеет места.

Отметим в заключение, что отображение a имеет собственное множество ξ , обладающее тем свойством, что $\mathfrak{X}^a(\xi) \subset \bar{p}^{-1}(c)$. (В качестве множества ξ можно взять, например, треугольник $\{x \in R_+^2 \mid x^1 + x^2 \leq 1\}$.)

Пример 2. Рассмотрим отображение $a: R_+^2 \rightarrow \Pi(R_+^2)$, определенное формулой

$$a(x) = \langle 0, x \rangle.$$

Модель Z , порожденная отображением a , имеет единственный темп роста $\alpha = 1$. При этом, как нетрудно проверить, $\pi_\alpha = (R_+^2)^* \setminus \{0\}$. Пусть x_0 — произвольная внутренняя точка конуса R_+^2 . Тогда при всех натуральных t

$$a^t(x_0) = \langle 0, x_0 \rangle$$

и, стало быть, предел $\lim a^t(x_0)$ существует и равен множеству $\xi = \langle 0, x_0 \rangle$. Множество $\partial^+\xi$ состоит из точек x таких, что $0 \leq x \leq x_0$ и либо $x^1 = x_0^1$, либо $x^2 = x_0^2$ (рис. 27). Любой функционал p из $\text{гн } \pi_\alpha$ принимает на $\partial^+\xi$ разные значения. Пусть T — произвольное натуральное число. Положим $x_1 = (x_0^1, \frac{1}{2}x_0^2)$ и рассмотрим траекторию $\chi = (x_t)_{t=0}^{2T}$, где $x_t = x_0$ ($t = 0, 1, \dots, T$), $x_t = x_1$ ($t = T + 1, \dots, 2T$).

Так как $x_{2T} = x_1 \in \partial^+\xi$, то траектория χ оптимальна. При любом $p \in \text{гн } \pi_\alpha$

$$p(x_t) = p(x_{t+1}) \quad (t = 0, 1, \dots, T - 1, T + 1, \dots, 2T),$$

$$p(x_T) > p(x_{T+1}),$$

так что процессы (x_t, x_{t+1}) ($t \neq T$) лежат в грани N_α , а процесс (x_T, x_{T+1}) в этой грани не лежит. Таким образом, в модели Z теорема о магистрали в сильной форме не имеет места.

Замечание 2. Пусть a — нормальное отображение $R_+^n \rightarrow \Pi(R_+^n)$, причем модель Z , определяемая этим отображением, имеет состояние равновесия $(\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$, где $\bar{p} \geq 0$. В этом случае a имеет собственный компакт ξ , отвечающий собственному числу α ,

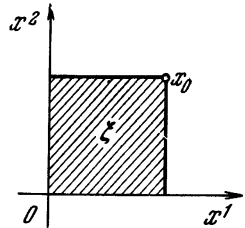


Рис. 27.

причем этот компакт, вообще говоря, не обязан быть телесным. Рассмотрим грань $\Gamma(\xi)$ конуса R_+^n , порожденную множеством ξ , и отображение $a_{\Gamma(\xi)}$ — сужение отображения a на грань $\Gamma(\xi)$. Множество ξ является телесным собственным компактом отображения $a_{\Gamma(\xi)}$. Это позволяет применить теорему 14.1 для исследования асимптотики траекторий модели Z , исходящих из точек конуса $\Gamma(\xi)$.

В случае, когда модель Z обладает лишь темпами роста α такими, что λ_α не содержит внутренних точек конуса $(R_+^n)^*$, имеет смысл рассмотреть модель \tilde{Z}_α (см. п. 3 § 13). Эта модель имеет состояние равновесия вида $(\alpha(\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$, где $\bar{p} \gg 0$. Используя ее, можно изучить асимптотику проекций $(\bar{x}_t)_{t=0}^T$ конечной траектории $\chi = (x_t)_{t=0}^T$ (определение этих проекций приведено в п. 3 § 13).

З а м е ч а н и е 3. Пусть a отображает R_+^n в $\Pi(R_+^n)$ и не является нормальным. Так как оптимальная траектория в модели Z , порождаемой a , является оптимальной и в модели nZ , порождаемой отображением na , то доказательство теоремы о магистрали в сильной форме для модели Z сводится к доказательству теоремы для нормальной модели nZ .

З а м е ч а н и е 4. Если модель имеет строгое состояние равновесия $(\alpha(\bar{x}, \alpha\bar{x}), \bar{p})$, то в формулировке теоремы 14.1 вместо неравенства $\rho\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha\right) \leq \varepsilon$ можно написать

$$\left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| \leq \varepsilon.$$

З а м е ч а н и е 5. Легко видеть, что в условиях теоремы имеет место следующее утверждение для оптимальных (бесконечных) траекторий: по любому $\varepsilon > 0$ найдется натуральное L такое, что для любой оптимальной траектории $\chi = (x_t)$, исходящей из заданной точки x_0 , при всех $t \geq L$ выполняется неравенство $\rho\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha\right) \leq \varepsilon$. (Число L здесь зависит лишь от ε и x_0 , но не от траектории.) Это утверждение уместно назвать теоремой о магистрали в сильной форме для оптимальных бесконечных траекторий.

5. Теорема Никайдо. Теорема о магистрали в сильной форме была впервые доказана Никайдо [4] для моделей, определяемых почти строго выпуклым конусом. Приведем доказательство этой теоремы в несколько более общей ситуации (для случая строгого состояния равновесия). Наше доказательство опирается на теорему 14.1 и отлично от доказательства Никайдо.

Т е о р е м а 14.2 (Н и к а й д о). Пусть нормальное отображение $a : R_+^n \rightarrow \Pi(R_+^n)$ таково, что порождаемая

и модель Z имеет строгое состояние равновесия $\sigma = \overline{=}(\alpha, (\bar{x}, \alpha\bar{x}), p)$, причем $\bar{x} \gg 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа L_1 и L_2 такие, что для всякой конечной оптимальной траектории $(x_t)_{t=0}^T$, исходящей из внутренней точки x_0 конуса R_+^n , выполняется

$$\left\| \frac{x_t}{\|x_t\|} - \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \right\| < \varepsilon,$$

если $L_1 < t < T - L_2$.

Доказательство. Считаем, не умаляя общности, что $\alpha = 1$ и $p(x) = 1$. Доказательство теоремы разобьем на три части.

1) Положим

$$\xi_1 = \bigcup_t a^t(\bar{x}), \quad \xi_2 = \bigcap_t a^t(\eta),$$

где $\eta = \{y \in R_+^n \mid p(y) \leq 1 = p(\bar{x})\}$. Так как состояние равновесия σ — строгое, то $p \gg 0$, и поэтому (см. п. 4 § 7) ξ_1 и ξ_2 — собственные компакты отображения a . При этом $\xi_1 \subset \xi_2$. Кроме того, поскольку $\bar{x} \gg 0$, то ξ_1 — телесный компакт. Введем в R^n монотонную норму $\|\cdot\|_{\xi_1}$, порождаемую нормальным телесным компактом ξ_1 (см. п. 12 § 2). Наша ближайшая цель заключается в доказательстве равенства $\xi_1 = \xi_2$. Предположим, что это равенство неверно. Тогда найдется элемент $y \in \xi_2$ такой, что $y \notin \xi_1$, т. е. $\|y\|_{\xi_1} = 1 + 2\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Последнее неравенство означает, что $y \notin (1 + \varepsilon)\xi_1$. Так как $\xi_2 = \bigcap_t a^t(\eta)$, то $y \in a^T(\eta)$ при любом натуральном T , и,

следовательно, найдется конечная траектория (y_0^T, \dots, y_T^T) , где $y_0^T \in \eta$, $y_T^T = y$. При этом

$$y_t^T \notin (1 + \varepsilon)\xi_1 \quad (t = 0, 1, 2, \dots, T; \quad T = 1, 2, \dots). \quad (14.17)$$

В самом деле, так как $(1 + \varepsilon)\xi_1$ — собственное множество отображения a (отвечающее числу $\alpha = 1$), то из включения $y_t^T \in (1 + \varepsilon)\xi_1$ следовали бы соотношения $y_{t+1}^T \in a(y_t^T) \subset a((1 + \varepsilon)\xi_1) = (1 + \varepsilon)\xi_1$, $y_{t+2}^T \in (1 + \varepsilon)\xi_1, \dots$, $y_T^T = y \in (1 + \varepsilon)\xi_1$, что невозможно. Применяя канторовский диагональный процесс, найдем последовательность номеров $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$ такую, чтобы

существовали пределы

$$y_0 = \lim y_0^{Tk}, y_1 = \lim y_1^{Tk}, \dots, y_t = \lim y_t^{Tk}, \dots \quad (14.18)$$

Последовательность (y_t) является траекторией модели Z . Так как Z имеет строгое состояние равновесия, то (теорема 13.4), существует предел $\lim y_t$, равный λx , где λ — некоторое неотрицательное число. Из (14.18) следует, что $y_t \in a^t(\eta)$ ($t = 1, 2, \dots$). Но, по определению η ,

$$\eta \supset a(\eta) \supset a^2(\eta) \supset \dots \supset a^t(\eta) \dots,$$

следовательно, $y_t \in \eta$, а потому и $\lim y_t = \lambda x \in \eta$. Еще раз привлекая определение множества η , получим

$$p(\lambda x) \leq p(x),$$

откуда следует неравенство $\lambda \leq 1$.

Покажем, с другой стороны, что $\lambda > 1$. В самом деле, переписывая (14.17) в виде $\|y_t^T\|_{\xi_1} \geq 1 + \varepsilon$ ($t = 1, 2, \dots, T, T = 1, 2, \dots$), получим неравенство $\|y_t\|_{\xi_1} \geq 1 + \varepsilon$, откуда следует, что

$$\|\lambda x\|_{\xi_1} = \lim \|y_t\|_{\xi_1} \geq 1 + \varepsilon.$$

Так как $x \in \xi_1$, то $\|\bar{x}\|_{\xi_1} \leq 1$ и, стало быть,

$$\lambda \geq (1 + \varepsilon) \cdot \|x\|_{\xi_1}^{-1} > 1.$$

Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно; таким образом,

$$\xi_1 = \xi_2. \quad (14.19)$$

2) Покажем, что $\mathcal{X}^a(\xi_1) = \{\bar{x}\}$. Включение $x \in \mathcal{X}^a(\xi_1)$ очевидно. Пусть теперь $x \in \xi_1$, $x \neq \bar{x}$ и $\chi = (x_t)$ — траектория, исходящая из x . Тогда при некотором $\lambda \geq 0$ выполняется $\lim x_t = \lambda x$. Очевидно, что $\lambda = \lim p(x_t)$. Так как $x \neq \bar{x}$ и состояние равновесия σ — строгое, то

$$\lim p(x_t) \leq p(x_1) < p(x) \leq \max_{x \in \xi_1} p(x) = 1.$$

Таким образом, $\lambda < 1$ и, стало быть, при достаточно больших t

$$\|x_t\|_{\xi_1} < \|\bar{x}\|_{\xi_1} \leq 1.$$

Последнее неравенство означает, что $x_t \notin \partial^+ \xi_1 = \partial^+ a^t(\xi_1)$, т. е. траектория χ не является ξ_1 -оптимальной. Итак, ни

одна траектория, исходящая из точки x , не является ξ_1 -оптимальной, т. е. $x \notin X^a(\xi_1)$.

Из доказанной нами формулы $X^a(\xi_1) = \{x\}$ следует, что собственное множество ξ_1 удовлетворяет условию 2) теоремы 14.1.

3) Покажем теперь, что для любой точки $x_0 \gg 0$ выполняется при некотором $\lambda > 0$ равенство $\lim a^t(x_0) = \lambda \xi_1$.

Для нормального компакта ξ положим

$$\lambda(\xi) = \max\{\lambda \mid \lambda x \in \xi\}, \quad \mu(\xi) = \max_{y \in \xi} p(y). \quad (14.20)$$

Функционалы μ и λ , определенные формулой (14.20) на совокупности Π_n^c всех нормальных подмножеств R_+^n , являются, как нетрудно проверить, непрерывными.

Положим для натуральных t

$$b_t = a^t(x_0), \quad \lambda_t = \lambda(b_t), \quad \mu_t = \mu(b_t).$$

Так как $\lambda_t x \in b_t = a^t(x_0)$ и $x \in a(x)$, то

$$\lambda_t x \in a(\lambda_t x) \subset a(a^t(x_0)) = b_{t+1},$$

откуда вытекает неравенство $\lambda_{t+1} \geq \lambda_t$. Таким образом, последовательность (λ_t) возрастает.

Пусть элемент $y \in b_{t+1}$ таков, что

$$p(y) = \mu_{t+1} = \max_{x \in b_{t+1}} p(x).$$

При некотором $x \in b_t$ выполняется $y \in a(x)$ и потому

$$\mu_{t+1} = p(y) \leq p(x) \leq \max_{x \in b_t} p(x) = \mu_t.$$

Таким образом, последовательность (μ_t) убывает. Из монотонности последовательностей (λ_t) и (μ_t) вытекает существование пределов $\lim \lambda_t = \tilde{\lambda}$ и $\lim \mu_t = \tilde{\mu}$. Покажем, что $\tilde{\lambda} = \tilde{\mu}$. Последовательность (b_t) ограничена (в противном случае выполнялось бы соотношение $\mu_t \rightarrow \infty$). В силу теоремы Бляшке эта последовательность имеет предельные точки. Пусть $\tilde{\xi}$ — одна из этих точек; $\tilde{\xi} = \lim b_{t_i}$.

Так как отображение a непрерывно (см. предложение 7.1), то $a(\tilde{\xi}) = \lim a(b_{t_i})$. Из непрерывности

функционалов λ и μ следует, что

$$\tilde{\lambda} = \lambda(\tilde{\xi}) = \lambda(a(\tilde{\xi})), \quad \tilde{\mu} = \mu(\tilde{\xi}) = \mu(a(\tilde{\xi})).$$

Пусть элемент $\tilde{y} \in a(\tilde{\xi})$ таков, что $\tilde{\mu} = \max_{y \in a(\tilde{\xi})} p(y) = p(\tilde{y})$.

Найдем элемент $\tilde{x} \in \tilde{\xi}$ такой, что $\tilde{y} \in a(\tilde{x})$. Покажем, что $\tilde{x} = \tilde{\lambda}x$. В самом деле, если это равенство неверно, то либо

1) \tilde{x} не пропорционален x , либо

2) $\tilde{x} = \omega x$, где $\omega < \tilde{\lambda}$.

В первом случае, благодаря строгости состояния равновесия σ , имеем

$$\tilde{\mu} = p(\tilde{y}) < p(\tilde{x}) \leq \max_{x \in \tilde{\xi}} p(x) = \mu(\tilde{\xi}) = \tilde{\mu},$$

что невозможно.

Во втором случае имеем

$$\frac{\tilde{\lambda}}{\omega} \tilde{y} \in a\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\omega} \tilde{x}\right) = a(\tilde{\lambda} \tilde{x}) \subset a(\tilde{\xi}),$$

откуда вытекает соотношение

$$\tilde{\mu} = \max_{y \in a(\tilde{\xi})} p(y) \geq \frac{\tilde{\lambda}}{\omega} p(\tilde{y}) = \frac{\tilde{\lambda}}{\omega} \tilde{\mu} > \tilde{\mu},$$

которое также невозможно.

Итак, $\tilde{x} = \tilde{\lambda}x$. Отсюда следует, что и $\tilde{y} = \tilde{\lambda}x$ (в противном случае $p(\tilde{y}) < p(\tilde{\lambda}x) = \tilde{\mu}$).

Из соотношений $p(\tilde{y}) = p(\tilde{\lambda}x) = \tilde{\lambda}p(x) = \tilde{\lambda}$ и вытекает равенство

$$\tilde{\mu} = \tilde{\lambda}. \quad (14.21)$$

Для завершения доказательства достаточно проверить, что каждая предельная точка $\tilde{\xi}$ последовательности (b_i) обладает тем свойством, что

$$\tilde{\lambda}\tilde{\xi}_1 \subset \tilde{\xi} \subset \tilde{\mu}\tilde{\xi}_2. \quad (14.22)$$

В самом деле, если (14.22) выполнено, то, учитывая равенства (14.19) и (14.21), имеем $\tilde{\xi} = \tilde{\lambda}\tilde{\xi}_1$ и, стало быть, $b_i \rightarrow \tilde{\lambda}\tilde{\xi}_1$.

Докажем соотношение (14.22). Пусть $\tilde{\xi} = \lim b_{t_l}$. Зафиксируем некоторое натуральное l_0 . Поскольку $\lambda_{t_l} \bar{x} \subset b_{t_l}$, то при $l \geq l_0$

$$b_{t_l} \supset \lambda_{t_l} a^{t-t_0}(\bar{x}).$$

Учитывая, что $a^T(\bar{x}) \rightarrow \xi_1$, получим, устремляя l к бесконечности, включение $\tilde{\xi} \supset \lambda_{t_0} \xi_1$. Устремляя теперь l_0 к бесконечности, получим $\tilde{\xi} \supset \tilde{\lambda} \xi_1$. С другой стороны, так как $b_{t_l} \subset \mu_{t_l} \eta$, где $\eta = \{y \in R_+^n \mid p(y) \leq 1\}$, то при $l \geq l_0$, имеем

$$b_{t_l} \subset a^{t-t_0}(\mu_{t_l} \eta).$$

Поскольку $a^T(\eta) \rightarrow \xi_2$, то при $l \rightarrow \infty$ имеем $\tilde{\xi} \subset \tilde{\mu}_{t_0} \xi_2$. откуда при $l_0 \rightarrow \infty$, получим $\tilde{\xi} \subset \tilde{\mu} \xi_2$. Таким образом, соотношения (14.22) доказаны. Как уже отмечалось, из этих соотношений вытекает равенство $\lim a^t(x_0) = \tilde{\lambda} \xi_1$.

Мы показали, что выполнены все условия теоремы 14.1, из которой и следует справедливость доказываемой теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Теорема верна не только для точек $x_0 \geq 0$, но и для точек x_0 , которые удовлетворяют условию:

$$a^T(x_0) \cap \text{int } R_+^n \neq \emptyset \text{ при некотором натуральном } T.$$

З а м е ч а н и е 2. Пусть ξ — телесный нормальный компакт в R_+^n . Рассуждая так же, как при доказательстве п. 3) теоремы, нетрудно проверить, что $\lim a^t(\xi) = \lambda \xi_1$ (где λ — некоторое положительное число). Отсюда, в частности, следует, что отображение a имеет единственный (с точностью до положительного множителя) собственный компакт. Отметим, что вопрос о единственности собственных множеств подробно изучен Рокаффелларом в работе [1].

§ 15. ТЕОРЕМА О МАГИСТРАЛИ В СИЛЬНЕЙШЕЙ ФОРМЕ

1. Вспомогательные предложения. В этом параграфе мы покажем, что при некоторых предположениях в моделях Неймана можно выделить достаточно обширный класс траекторий, обладающих тем свойством, что почти все процессы, их составляющие, лежат в неймановской грани.

Всюду в этом параграфе рассматривается модель Неймана, определяемая многогранным конусом $Z \subset R_+^n \times R_+^n$ таким, что $\text{Pr}_1 Z = \text{Pr}_2 Z = R_+^n$. Предполагается также, что производственное отображение a модели Z нормально (если a не нормально, то можно рассмотреть его нормальную оболочку).

Важную роль в дальнейшем играет следующее

Предложение 15.1. Пусть N_α — неймановская грань модели Z , отвечающая темпу роста α . Тогда для любого натурального T найдется число $\varepsilon > 0$, обладающее следующим свойством: если траектория $\tilde{\chi} = (\tilde{x}_t)_{t=0}^T$ модели Z такова, что *) $\tilde{\chi} \neq 0$ и

$$\rho \left(\frac{(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1})}{\|\tilde{x}_t\|}, N_\alpha \right) \leq \varepsilon, \quad t = (0, 1, \dots, T-1),$$

то найдутся такие траектории $\chi' = (x'_t)_{t=0}^T$ и $\chi'' = (x''_t)_{t=0}^T$ модели Z , что

$$\tilde{x}_t = x'_t + x''_t \quad (t = 0, 1, \dots, T),$$

$$\chi' \neq 0, \quad (x'_t, x'_{t+1}) \in N_\alpha \quad (t = 0, 1, \dots, T-1).$$

Доказательство предложения мы проведем в несколько этапов.

1) Рассмотрим в пространстве $(R^n)^{T+1} = \underbrace{R^n \times R^n \times \dots \times R^n}_{T+1}$ множество Z^T , элементами которого

являются все T -шаговые траектории модели Z . Нетрудно проверить, что Z^T — выпуклый замкнутый конус.

Пусть функционал $(f, g) \in (R^n)^* \times (R^n)^*$ таков, что $f(x) + g(y) \geq 0$ для любой пары $(x, y) \in Z$, т. е. $(f, g) \in Z^*$. Тогда, как следует непосредственно из определения, функционалы над пространством $(R^n)^{T+1}$

$$\varphi_0 = (f, g, 0, \dots, 0), \quad \varphi_1 = (0, f, g, 0, \dots, 0), \quad \dots \\ \dots, \quad \varphi_{T-1} = (0, 0, \dots, f, g)$$

входят в $(Z^T)^*$ (т. е. $\varphi_t(\chi) \geq 0$, если $\chi \in Z^T$, $t = 0, 1, \dots, T-1$). С другой стороны, если $\varphi = (0, 0, \dots, f, g, \dots, 0) \in (Z^T)^*$, то $(f, g) \in Z^*$.

*) Запись $\bar{\chi} \neq 0$ означает, что $\tilde{x}_0 \neq 0$.

Из этого простого замечания следует, что Z^T — многогранный конус. В самом деле, так как конус Z многогранен, то он является пересечением конечного числа полупространств вида $f^{(k)}(x) + g^{(k)}(y) \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$), а потому Z^T является пересечением конечного числа полупространств, определяемых неравенствами $\varphi_t^{(k)}(\chi) \geq 0$ ($t = 0, 1, \dots, T-1, k = 1, 2, \dots, m$); здесь $\varphi_t^{(k)} = (0, 0, \dots, f_t^{(k)}, g^{(k)}, 0, \dots, 0)$.

2) Обозначим через N_α^T совокупность всех элементов $\chi = (x_0, \dots, x_T)$ конуса Z^T , таких, что $(x_t, x_{t+1}) \in N_\alpha$ ($t = 0, 1, \dots, T-1$). Множество N_α^T непусто, так как оно содержит элемент $\bar{\chi} = (\bar{x}, \alpha \bar{x}, \dots, \alpha^T \bar{x})$ (здесь \bar{x} — элемент, входящий в состояние равновесия $(\alpha, (\bar{x}, \alpha \bar{x}), p)$; такое состояние существует, так как производственное отображение модели Z нормально). Покажем, что N_α^T является гранью конуса Z^T . С этой целью рассмотрим функционалы $p \in \text{ri } \pi_\alpha$ и $\varphi_t = (0, 0, \dots, \alpha p, -p, 0, \dots, 0)$ над пространством $(R^n)^{T+1}$. Положим

$$\varphi = \sum_{t=0}^{T-1} \varphi_t.$$

Так как $\varphi_t(\chi) \geq 0$ для любого элемента $\chi \in Z^T$ ($t = 0, \dots, T-1$), то и $\varphi(\chi) \geq 0$. Если $\varphi(\chi) = 0$, то $\varphi_t(\chi) = 0$ при всех t . Это означает, что $\chi \in N_\alpha^T$. С другой стороны, если $\chi \in N_\alpha^T$, то $\varphi(\chi) = 0$. Таким образом, множество N_α^T совпадает с пересечением конуса Z^T и гиперплоскости H_φ функционала φ . Так как $\varphi \in (Z^T)^*$, то H_φ является гранью конуса Z^T (см. п. 13 § 2).

3) Поскольку Z^T — многогранный конус, то он является конической оболочкой конечного числа элементов $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_l$. Пусть элементы χ_i занумерованы так, что $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_j \in N_\alpha^T, \chi_{j+1}, \dots, \chi_l \notin N_\alpha^T$. Обозначим через Ω пересечение конической оболочки элементов $\chi_{j+1}, \dots, \chi_l$ с единичной сферой S пространства $(R^n)^{T+1}$. Так как $\varphi(\chi) = 0$ ($\chi \in N_\alpha^T$) и $\varphi(\chi) > 0$ ($\chi \in \Omega$) (здесь φ — функционал, построенный в п. 2), то множества N_α^T и Ω не пересекаются, а потому $\rho(N_\alpha^T, \Omega) = \delta > 0$.

4) Рассмотрим траекторию $\tilde{\chi} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_T)$, фигурирующую в условии предложения. Эту траекторию

можно рассматривать как элемент конуса Z^T . Так как $\rho\left(\frac{(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1})}{\|\tilde{x}_t\|}, N_\alpha\right) < \varepsilon$, то и

$$\rho\left(\frac{(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t+1})}{\|\tilde{x}_t\|}, H_p\right) = \frac{\alpha p(\tilde{x}_t) - p(\tilde{x}_{t+1})}{\|\tilde{x}_t\|} < \varepsilon,$$

здесь $p \in \text{gr } \pi_\alpha$, H_p есть гиперплоскость функционала $(\alpha p, -p)$. Иными словами, $\varphi_t(\tilde{\chi}) < \varepsilon \|\tilde{x}_t\|$ ($t = 0, 1, \dots, T-1$). Суммируя полученные неравенства по t , получим неравенство

$$\varphi(\tilde{\chi}) = \sum_{t=0}^{T-1} \varphi_t(\tilde{\chi}) < \varepsilon \sum_{t=0}^{T-1} \|\tilde{x}_t\| \leq \varepsilon \sum_{t=0}^T \|\tilde{x}_t\|.$$

Не умаляя общности, можно считать, что норма в пространстве $(R^n)^{T+1}$ введена таким образом, что $\|\tilde{\chi}\| = \sum_{t=0}^T \|\tilde{x}_t\|$; поэтому $\frac{\varphi(\tilde{\chi})}{\|\tilde{\chi}\|} < \varepsilon$. Используя предложение 13.4, получим теперь

$$\rho\left(\frac{\tilde{\chi}}{\|\tilde{\chi}\|}, H_\varphi\right) = \frac{\varphi(\tilde{\chi})}{\|\tilde{\chi}\| \|\varphi\|} < \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|}.$$

Так как $N_\alpha^T = H_\varphi \cap Z_T$ и конус Z_T многогранен, то найдется константа C такая, что $\rho(\chi, N_\alpha^T) \leq C \rho(\chi, H_\varphi)$ для любого элемента χ из Z_T , имеющего единичную норму. Учитывая это обстоятельство, имеем

$$\rho\left(\frac{\tilde{\chi}}{\|\tilde{\chi}\|}, N_\alpha^T\right) \leq \frac{C}{\|\varphi\|} \varepsilon.$$

5) Пусть число ε удовлетворяет неравенству $\varepsilon < \frac{\|\varphi\|}{C} \delta$, где $\delta = \rho(N_\alpha^T, \Omega) > 0$ (Ω — множество, определенное в п. 3) доказательства). Тогда $\rho\left(\frac{\tilde{\chi}}{\|\tilde{\chi}\|}, N_\alpha^T\right) < \delta$. Это неравенство показывает, что элемент $\tilde{\chi}$ конуса Z_T не входит в конус, натянутый на образующие $\chi_{j+1}, \dots, \chi_l$, не принадлежащие грани N_α^T . Таким образом, если $\tilde{\chi}$ представ-

лен в виде $\tilde{\chi} = \sum_{i=1}^l \lambda_i \chi_i$ ($\lambda_i \geq 0$), то по крайней мере одно из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ отлично от нуля. Положим $\chi' = \sum_{i=1}^j \lambda_i \chi_i$, $\chi'' = \sum_{i=j+1}^l \lambda_i \chi_i$. Очевидно, что элементы χ' и χ'' являются искомыми.

Предложение доказано.

Так как конус Z , рассматриваемый нами, многогранен, то он является конической оболочкой конечного числа образующих. Не умаляя общности, можно считать, что эти образующие «конически независимы», т. е. ни одна из них не входит в коническую оболочку остальных. Эти образующие будем называть *базисными процессами* и обозначать через (α_s, β_s) ($s = 1, 2, \dots, S$).

Пусть $\chi_T = (x_i)_{i=0}^T$ — конечная траектория модели Z . Для траектории χ_T существует последовательность $(h_i)_{i=1}^T$ (где $h_i \in R_+^S$ ($t = 1, \dots, T$)) такая, что

$$x_t = \sum_{s=0}^S \alpha_s h_{t+1}^s, \quad x_{t+1} = \sum_{s=0}^S \beta_s h_{t+1}^s.$$

Вектор h_t называется *планом* траектории χ_T в период t , а сама последовательность $(h_i)_{i=1}^T$ — *траекторией планов* для χ_T . Каждой траектории планов $(h_i)_{i=1}^T$ можно сопоставить $S \cdot T$ -мерный вектор $H = (h_1, h_2, \dots, h_T)$. Будем говорить, что этот вектор *порождает траекторию* χ_T . Заметим, что, вообще говоря, траекторию планов для χ_T можно указать не единственным способом.

Введем теперь следующее определение. T -шаговую траекторию $\chi_T = (x_i)_{i=0}^T$ модели Z назовем *базисной*, если найдется траектория $(h_i)_{i=1}^T$ планов для χ_T такая, что вектор $H = (h_1, \dots, h_T)$, порождающий χ_T , содержит не более n ($T + 1$) отличных от нуля координат.

Траектория планов естественным образом определяется и для бесконечной траектории. Каждой такой траектории χ можно сопоставить последовательность $H = (h_1, h_2, \dots, h_t, \dots)$. Про последовательность H будем говорить, что она *порождает* χ . Траекторию $\chi = (x_i)$ назовем *базисной*, если найдется порождающая ее последователь-

Ясно, что последовательность $\tilde{\chi} = (\tilde{x}_t)_{t=0}^T$, где $\tilde{x}_0 = x_0$, $\tilde{x}_t = B\tilde{h}_t = A\tilde{h}_{t+1}$ ($t = 2, \dots, T-1$), $\tilde{x}_T = B\tilde{h}_T$ является базисной траекторией модели Z .

Предложение доказано.

Нам понадобится еще следующее определение.

Темп роста α модели Z называется невырожденным, если

1) неймановская грань N_α представляет собой коническую оболочку в точности n базисных процессов $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$;

2) существует натуральное M такое, что для любой T -шаговой траектории $\chi_T = (x_t)_{t=0}^T$ ($T > M$), обладающей тем свойством, что $(x_t, x_{t+1}) \in N_\alpha$ ($t = 0, 1, \dots, T-1$), каждый из процессов (x_t, x_{t+1}) ($t = M, M+1, \dots, T-1$) является относительно внутренней точкой грани N_α . (Последнее означает, что в любом разложении (x_t, x_{t+1})

по образующим $(x_t, x_{t+1}) = \sum_{s=1}^n h_{s,t} (\alpha_s, \beta_s)$ все коэффициенты $h_{s,t}$ положительны.)

2. Теорема о магистрали в сильнейшей форме.

Т е о р е м а 15.1. Пусть модель Z обладает невырожденным темпом роста α . Тогда у любой базисной траектории $x = (x_t)$, имеющей средний темп роста α , все процессы (x_t, x_{t+1}) , за исключением, может быть, лишь конечного числа, лежат в грани N_α .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ε — число, которое отвечает натуральному $M+1$ в силу предложения 15.1. (Здесь M — число, фигурирующее в определении невырожденности.) Так как траектория χ имеет темп роста α , то она стремится к грани N_α , и потому найдется номер τ такой, что при $t \geq \tau$

$$\rho \left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_\alpha \right) < \varepsilon.$$

Так как χ — базисная траектория, то существует последовательность

$$H = (h_1, h_2, \dots, h_t, \dots) \quad (h_t \in R^S, t = 1, 2, \dots),$$

представляющая χ и такая, что каждый $S \times t$ -мерный вектор (h_1, h_2, \dots, h_t) содержит не более $n(t+1)$ не-

нулевых координат. Рассмотрим $(M + 1)$ -шаговую траекторию $\chi_M = (x_\tau, x_{\tau+1}, \dots, x_{\tau+M+1})$ и, используя предложение 15.1, найдем траектории $\chi' = (x'_i)_{i=0}^{M+1}$ и $\chi'' = (x''_i)_{i=0}^{M+1}$ такие, что $x_{\tau+t} = x'_t + x''_t$ ($t = 0, 1, \dots, M + 1$), $\chi' \neq 0$, $(x'_t, x_{t+1}) \in N_\alpha$ ($t = 0, 1, \dots, M$). Представлению траектории χ_M в виде суммы слагаемых χ' и χ'' отвечает представление вектора $(h_\tau, \dots, h_{\tau+M})$, порождающего χ_M , в виде суммы векторов $(h'_\tau, \dots, h'_{\tau+M})$ и $(h''_\tau, \dots, h''_{\tau+M})$, порождающих χ' и χ'' соответственно. Так как траектория χ' «идет по грани N_α » и темп роста невырожден, то $(x'_M, x'_{M+1}) \in \text{ri } N_\alpha$. Это означает, что вектор $h'_{\tau+M}$ имеет n ненулевых координат и, стало быть, вектор $h_{\tau+M}$ имеет n ненулевых координат, отвечающих образующим неймановской грани. Таким же образом можно убедиться в том, что у вектора $h_{\tau+T}$ ($T \geq M$) координаты $h^1_{\tau+M}, \dots, h^n_{\tau+M}$, отвечающие неймановским образующим, положительны (для этого надо рассмотреть траекторию $(x_{\tau+T-M}, \dots, x_{\tau+T})$).

Предположим, что существует p процессов $(x_{\tau_1}, x_{\tau_1+1}), \dots, (x_{\tau_p}, x_{\tau_p+1})$ ($\tau_p > \tau_{p-1} > \dots > \tau_1 \geq \tau + M$), не лежащих в неймановской грани. Тогда каждый вектор $h_{\tau_1}, \dots, h_{\tau_p}$ имеет по крайней мере одну положительную координату, отвечающую образующей, не лежащей в грани N_α . Пусть $t > \tau_p$. Оценим общее число Q ненулевых координат вектора (h_1, h_2, \dots, h_t) . Так как каждый из векторов $h_1, \dots, h_{\tau+M-1}$ имеет по крайней мере одну ненулевую координату, то $Q \geq \tau + M - 1 + n(t - (\tau + M - 1)) + p = nt - (n - 1)(\tau + M - 1) + p$. В то же время, используя базисность траектории χ , получим $Q \leq n(t + 1) = nt + n$. Итак, $nt + n \geq nt - (n - 1)(\tau + M - 1) + p$, откуда вытекает, что $p \leq n + (n - 1)(\tau + M - 1)$. Из полученного неравенства и следует утверждение теоремы.

Используя теорему 13.3 (о магистрали в слабой форме) и рассуждая так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, легко показать, что имеет место

Т е о р е м а 15.2. Пусть α — невырожденный темп роста модели Z , точка $x_0 > 0$ и функционал $f > 0$ удовлетворяют следующим условиям:

а) из точки x_0 исходит траектория $\bar{\chi}$, имеющая средний темп роста α ,

б) $k''p \leq f \leq k'p$ (где $k', k'' > 0$, $p \in \text{ri } \pi_\alpha$). Тогда для любой конечной траектории $(x_t)_{t=0}^T$, базисной и оптимальной в смысле f , число процессов (x_t, x_{t+1}) , не лежащих в грани N_α , не превосходит некоторого числа L .

Нетрудно привести примеры, показывающие, что и условие невырожденности темпа роста и условие базисности траектории существенны для справедливости теоремы о магистрали в сильнейшей форме.

§ 16. АСИМПТОТИКА ТРАЕКТОРИЙ ОБЩЕЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1. Асимптотика траекторий, допускающих согласование. Магистральный характер теорем об асимптотическом поведении траекторий модели Неймана — Гейла объяснялся прежде всего наличием магистрали, т. е. неймановской грани. В моделях с переменной технологией асимптотика траекторий теряет магистральный характер. Тем не менее некоторые результаты, относящиеся к асимптотическому поведению траекторий, могут быть получены и в общих технологических моделях.

В этом параграфе мы рассматриваем общую технологическую модель второго рода

$$\mathfrak{M} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_\tau, t)_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\}.$$

Считаем, что в пространстве X_t ($t \in E$) введена некоторым (если явно не оговорено противное, произвольным) образом норма, которую обозначим символом $\|\cdot\|_t$. Заметим, что никакой связи между нормами $\|\cdot\|_t$ при разных t не предполагается. Пусть $(\tau, t) \in \tilde{E}$. Символом $\|\cdot\|_{t, \tau}$ обозначим норму в пространстве $X_t \times X_\tau$, определяемую следующим образом:

$$\|(x, y)\|_{t, \tau} = (\|x\|_t^2 + \|y\|_\tau^2)^{1/2} \quad ((x, y) \in X_t \times X_\tau).$$

Расстояние от элемента z до множества Ω в пространстве X_t (соответственно, в $X_t \times X_\tau$) будем обозначать символом $\rho_t(z, \Omega)$ (соответственно, $\rho_{t, \tau}(z, \Omega)$). Если норма в каждом из пространств X_t ($t \in E$) обозначена символом $\|\cdot\|_t$, который снабжен некоторым индексом, штрихом и т. п., то символы $\|\cdot\|_{t, \tau}$, ρ_t , $\rho_{t, \tau}$ будем снабжать тем же индексом, штрихом и т. п.

В этом пункте мы рассмотрим асимптотическое поведение траекторий модели \mathfrak{M} , допускающих согласование*). Нам понадобится следующее простое

Предложение 16.1. Пусть X_1, X_2 — конечномерные нормированные пространства; $x_i \in X_i, f_i \in X_i^*$ ($i = 1, 2$), причем $f_1(x_1) \geq f_2(x_2) > 0$. Положим $H = \{(x, y) \in X_1 \times X_2 \mid f_1(x) = f_2(y)\}$. Тогда **)

$$\rho\left(\frac{(x_1, x_2)}{\|x_1\|}, H\right) \leq 1 - \frac{f_2(x_2)}{f_1(x_1)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функционал $g = (f_1, -f_2)$ из пространства $(X_1 \times X_2)^*$. Очевидно, что $H = g^{-1}(0)$.

Так как

$$g\left(\frac{(x_1, x_2)}{\|x_1\|}\right) = \frac{1}{\|x_1\|} (f_1(x_1) - f_2(x_2)) \geq 0,$$

то, используя предложение 13.4, получим

$$\rho\left(\frac{(x_1, x_2)}{\|x_1\|}, H\right) = \frac{g(x_1, x_2)}{\|x_1\| \|g\|}.$$

Учитывая, что $g((x_1, 0)) = f_1(x_1)$, имеем

$$\|x_1\| \|g\| = \|x_1\| \max_{z \in X_1 \times X_2} \frac{g(z)}{\|z\|} \geq \|x_1\| \frac{g((x_1, 0))}{\|(x_1, 0)\|} = f_1(x_1).$$

Таким образом,

$$\rho\left(\frac{(x_1, x_2)}{\|x_1\|}, H\right) \leq \frac{g((x_1, x_2))}{f_1(x_1)} = \frac{f_1(x_1) - f_2(x_2)}{f_1(x_1)} = 1 - \frac{f_2(x_2)}{f_1(x_1)},$$

что и требовалось доказать.

*) Напомним, что траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} допускает согласование, если найдется траектория $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M}' такая, что $\lim f_t(x_t) > 0$.

***) Здесь символом $\rho\left(\frac{(x_1, x_2)}{\|x_1\|}, H\right)$ обозначено расстояние от элемента $\left(\frac{x_1, x_2}{\|x_1\|}\right)$ пространства $X_1 \times X_2$ до множества H , вычисленное по норме $\|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$. Заметим, что $\|x_1\| \neq 0$, так как $f_1(x_1) > 0$.

Т е о р е м а 16.1. Пусть (χ, φ) — согласованная пара-траекторий *)

$$\chi = (x_t)_{t \in E}, \chi \in P_{\mathfrak{M}}; \quad \varphi = (f_t)_{t \in E}, \quad \varphi \in P_{\mathfrak{M}'}$$

Пусть, далее, $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ — произвольная возрастающая последовательность элементов множества E и

$$H_{t_k, t_{k+1}} = \{(x, y) \in X_{t_k} \times X_{t_{k+1}} \mid f_{t_k}(x) = f_{t_{k+1}}(y)\}.$$

Тогда

$$\rho_{t_k, t_{k+1}} \left(\frac{(x_{t_k}, x_{t_{k+1}})}{\|x_{t_k}\|_{t_k}}, H_{t_k, t_{k+1}} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 16.1 при всех k

$$\rho_{t_k, t_{k+1}} \left(\frac{(x_{t_k}, x_{t_{k+1}})}{\|x_{t_k}\|_{t_k}}, H_{t_k, t_{k+1}} \right) \leq 1 - \frac{f_{t_k}(x_{t_k})}{f_{t_{k+1}}(x_{t_{k+1}})}.$$

(Условия предложения выполнены, так как φ и χ являются траекториями моделей \mathfrak{M}' и \mathfrak{M} соответственно и, кроме того, $f_{t_k}(x_{t_k}) > 0$ ($k = 1, 2, \dots$)).

Так как $\lim f_{t_k}(x_{t_k}) > 0$, то

$$\lim \frac{f_{t_k}(x_{t_k})}{f_{t_{k+1}}(x_{t_{k+1}})} = 1,$$

откуда и следует справедливость теоремы.

Пусть в каждом из пространств X_t ($t \in E$) введена норма $\|\cdot\|_t'$. Пусть, далее, $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ и $\chi = (x_t)_{t \in E}$ — траектории моделей \mathfrak{M}' и \mathfrak{M} соответственно. Положим

$$H_{t, \tau}(\varphi) = \{(x, y) \in X_t \times X_{\tau} \mid f_t(x) = f_{\tau}(y)\} \quad ((\tau, t) \in \bar{E}).$$

Введем следующие определения. Будем говорить, что траектория χ стремится к семейству гиперплоскостей траектории φ в смысле семейства норм $(\|\cdot\|_t')$, если для любой возрастающей последовательности $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ элементов

*) Напомним, что символом $P_{\mathfrak{M}}$ (соответственно, $P_{\mathfrak{M}'}$) обозначаем пучок траекторий модели \mathfrak{M} (соответственно, \mathfrak{M}').

множества E выполняется *)

$$\rho'_{t_k, t_{k+1}} \left(\frac{(x_{t_k}, x_{t_{k+1}})}{\|x_{t_k}\|_{t_k}}, H_{t_k, t_{k+1}}(\varphi) \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Будем говорить, что траектория χ абсолютно стремится к семейству гиперплоскостей траектории φ , если она стремится к этому семейству в смысле любого семейства норм.

В новых терминах теорема 16.1 может быть сформулирована следующим образом.

Т е о р е м а 16.1'. Если (χ, φ) — согласованная при траекториях ($\chi \in P_{\mathfrak{M}}, \varphi \in P_{\mathfrak{M}'}$), то χ абсолютно стремится к семейству гиперплоскостей траектории φ .

Рассмотрим теперь траекторию $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M}' , обладающую тем свойством, что для любого $t \in E$ функционал f_t является внутренней точкой конуса K_t^* , и определим семейство норм $(\|\cdot\|_t^\circ)$, порожденное траекторией φ . С этой целью в пространстве X_t ($t \in E$) рассмотрим множество $\Omega_t = \{x \in K_t \mid f_t(x) \leq 1\}$ ($t \in E$). Это множество выпукло, нормально.

Положим теперь $S_t = \Omega_t - \Omega_t$. Множество S_t выпукло, компактно, симметрично и телесно. Функционал Минковского этого множества, который обозначим символом $\|\cdot\|_t^\circ$, является монотонной нормой в пространстве X_t ($t \in E$). Нетрудно проверить справедливость следующих утверждений:

а) для $x \in K_t$

$$\|x\|_t^\circ = f_t(x), \quad (16.1)$$

б) если $x \in X_t$ и $\|x\|_t^\circ \leq 1$, то $|f_t(x)| \leq 1$,

$$\|f_t\|_t^\circ = \sup_{\|x\|_t^\circ \leq 1} f_t(x) = 1. \quad (16.2)$$

Имеет место

*) Если $x_{t_k} = 0$, то, по определению

$$\rho'_{t_k, t_{k+1}} \left(\frac{(x_{t_k}, x_{t_{k+1}})}{\|x_{t_k}\|_{t_k}}, H_{t_k, t_{k+1}}(\varphi) \right) = 0.$$

Предложение 16.2. Пусть $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ — траектория модели \mathfrak{M} такая, что $f_t \in \text{int}(K_t^*)$ ($t \in E$); пусть, далее, траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} стремится к семейству гиперплоскостей траектории φ в смысле семейства норм $(\|\cdot\|_t^\varphi)_{t \in E}$ и $x_t \neq 0$ ($t \in E$). Тогда пара траекторий (χ, φ) согласована.

Доказательство. Допустим, что предложение неверно. Тогда $\liminf_t f_t(x_t) = 0$, и потому найдется возрастающая последовательность $(t_k)_{k=1}^\infty$ элементов множества E такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_{t_{k+1}}(x_{t_{k+1}})}{f_{t_k}(x_{t_k})} = s < 1.$$

По условию предложения,

$$\rho^\varphi \left(\frac{(x_{t_k}, x_{t_{k+1}})}{\|x_{t_k}\|_{t_k}^\varphi}, H_{t_k, t_{k+1}}(\varphi) \right) \rightarrow 0. \quad (16.3)$$

Используя предложение 13.4, а также формулы (16.1) и (16.2), получим, что

$$\begin{aligned} \rho^\varphi \left(\frac{(x_{t_k}, x_{t_{k+1}})}{\|x_{t_k}\|_{t_k}^\varphi}, H_{t_k, t_{k+1}}(\varphi) \right) &= \frac{f_{t_k}(x_{t_k}) - f_{t_{k+1}}(x_{t_{k+1}})}{\|x_{t_k}\|_{t_k}^\varphi \| (f_{t_k}, -f_{t_{k+1}}) \|_{t_k, t_{k+1}}^\varphi} = \\ &= \frac{f_{t_k}(x_{t_k}) - f_{t_{k+1}}(x_{t_{k+1}})}{f_{t_k}(x_{t_k}) (\|f_{t_k}\|_{t_k}^\varphi)^2 + (\|f_{t_{k+1}}\|_{t_{k+1}}^\varphi)^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{f_{t_{k+1}}(x_{t_{k+1}})}{f_{t_k}(x_{t_k})} \right). \end{aligned}$$

Учитывая (16.3), имеем $0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - s)$, что невозможно, так как $s < 1$. Полученное противоречие и доказывает предложение. Из предложения 16.2 вытекает следующая теорема, которую можно рассматривать как частичное обращение теоремы 16.1'.

Теорема 16.2. Пусть $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ — траектория модели \mathfrak{M} такая, что $f_t \in \text{int}(K_t^*)$ ($t \in E$); пусть, далее, траектория $\chi = (x_t)_{t \in E}$ модели \mathfrak{M} абсолютно стремится к семейству гиперплоскостей траектории φ и $x_t \neq 0$. Тогда пара траекторий (χ, φ) согласована.

Заметим еще, что из теоремы 16.1 и предложения 16.2 вытекает следующее

Предложение 16.3. Если $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ — траектория модели \mathfrak{M}' , причем $f_t \in \text{int}(K_t^*)$ ($t \in E$), и траектория χ стремится к семейству гиперплоскостей траектории φ в смысле семейства норм $(\|\cdot\|_t^*)_{t \in E}$, то она стремится к этому семейству абсолютно.

В заключение этого пункта приведем простое предложение, подчеркивающее важность понятия абсолютной сходимости.

Предложение 16.4. Пусть модель \mathfrak{M} такова, что размерность пространств X_t ($t \in E$) больше единицы. Пусть, далее, $\varphi = (f_t)_{t \in E}$ — траектория модели \mathfrak{M}' , причем $f_t \in \text{int}(K_t^*)$ ($t \in E$). Тогда для каждой траектории $\chi = (x_t)_{t \in E}$ ($x_t \neq 0$, $t \in E$) модели \mathfrak{M} найдется семейство норм $(\|\cdot\|_t)_{t \in E}$ такое, что χ стремится к семейству гиперплоскостей траектории φ в смысле $(\|\cdot\|_t)_{t \in E}$.

Доказательство. Из условия предложения вытекает, что найдется элемент y_t ($t \in E$) конуса K_t , линейно независимый с x_t и такой, что $f_t(y_t) = 1$.

Так как элементы x_t и y_t линейно независимы, то найдется функционал h_t из X_t^* такой, что

$$h_t(x_t) = h_t(y_t) = 1 \quad (t \in E).$$

Пусть $\|\cdot\|_t$ — некоторая произвольная норма в пространстве X_t и $c_t = \max(\|x_t\|_t, \|y_t\|_t)$. Для $x \in X_t$ положим

$$\|x\|_t' = \max\left(\frac{\|x\|_t}{c_t}, |h_t(x)|\right). \quad (16.4)$$

Нетрудно проверить, что функционал $\|\cdot\|_t'$, определенный на X_t формулой (16.4), является нормой. Отметим еще, что, как следует из определения числа c_t ,

$$\|x_t\|_t' = \|y_t\|_t' = 1. \quad (16.5)$$

Оценим теперь $\|f_t\|_t'$. Имеем

$$\|f_t\|_t' = \max_{\|y\|_t' \leq 1} f_t(y) \geq f_t(y_t) = 1. \quad (16.6)$$

Покажем, что траектория χ стремится к семейству гипер-

плоскостей траектории φ в смысле семейства норм $(\|\cdot\|_t)_{t \in E}$. Пусть $(t_k)_{k=1}^\infty$ — произвольная возрастающая последовательность элементов множества E .

Используя предложение 13.4, а также формулы (16.5) и (16.6), имеем

$$\begin{aligned} \rho'_{t_k, t_{k+1}} \left(\frac{(x_{t_k}, x_{t_{k+1}})}{\|x_{t_k}\|'_{t_k}}, H_{t_k, t_{k+1}}(\varphi) \right) &= \\ &= \frac{f_{t_k}(x_{t_k}) - f_{t_{k+1}}(x_{t_{k+1}})}{\|x_{t_k}\|'_{t_k} \|f_{t_k} - f_{t_{k+1}}\|'_{t_k, t_{k+1}}} = \\ &= \frac{f_{t_k}(x_{t_k}) - f_{t_{k+1}}(x_{t_{k+1}})}{\sqrt{(\|f_{t_k}\|'_{t_k})^2 + (\|f_{t_{k+1}}\|'_{t_{k+1}})^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (f_{t_k}(x_{t_k}) - f_{t_{k+1}}(x_{t_{k+1}})). \end{aligned}$$

Последовательность $(f_{t_k}(x_{t_k}))$ не возрастает и ограничена снизу, и потому

$$\lim (f_{t_k}(x_{t_k}) - f_{t_{k+1}}(x_{t_{k+1}})) = 0.$$

Предложение доказано.

2. Приложение полученных результатов к модели Неймана — Гейла. Результаты, полученные в предыдущем пункте, могут быть применены для изучения некоторых асимптотических свойств модели Неймана — Гейла. Будем считать, простоты ради, что изучаемая модель Неймана — Гейла Z определяется нормальным отображением $a : R_+^n \rightarrow \Pi(R_+^n)$. Наряду с Z рассмотрим технологическую модель второго рода

$$\mathfrak{N} = \{E, (X_t)_{t \in E}, (K_t)_{t \in E}, (a_\tau, t)_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\},$$

пучок траекторий которой совпадает с совокупностью всех траекторий модели Z . (Определение этой модели см. в п. 3 § 10.)

Дадим прежде всего геометрическую характеристику траекторий модели Z , имеющих средний темп роста α .

Т е о р е м а 16.3. Пусть модель Z имеет состояние равновесия $(\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$, где $\bar{p} \gg 0$. Для того чтобы траектория $\chi = (x_t)$ этой модели имела средний темп роста α , необходимо и достаточно, чтобы она абсолютно стре-

милась к системе гиперплоскостей траектории $\varphi = (\bar{p}, \alpha^{-1} \bar{p}, \dots, \alpha^{-t} \bar{p}, \dots)$ модели \mathfrak{M}' .

Доказательство следует из теорем 16.1' и 16.2.

Результаты п. 1 позволяют описать более точно асимптотику траекторий модели Z , исходящих из граничных точек конуса R_+^n . Рассмотрим подмодель \mathfrak{N}^x модели \mathfrak{N} порожденную граничной точкой x конуса R_+^n :

$$\mathfrak{N}^x = \{E, (L_t^x)_{t \in E}, (\Gamma_t^x)_{t \in E}, (a_{\tau, t}^x)_{(\tau, t) \in \tilde{E}}\}.$$

Так как Γ_t^x — грань конуса R_+^n и этот конус многогранен, то последовательность $(\Gamma_t^x)_{t \in E}$ состоит лишь из конечного числа элементов; отсюда следует, в частности, что найдутся целое число θ ($\theta \geq 0$) и натуральное T , при которых $\Gamma_{\theta+T}^x = \Gamma_\theta^x$.

Пусть $\tilde{\theta}$ и \tilde{T} — наименьшие числа, при которых выполняется это соотношение. Считаем, простоты ради, что $\tilde{\theta} = 0$, и рассмотрим отдельно два случая.

1) $\tilde{T} = 1$. В этом случае $\Gamma_0^x = \Gamma_1^x$. Пусть \tilde{a} — сужение отображения a на грань Γ_0^x . Тогда, по определению подмодели, $\tilde{a}(\Gamma_0^x) = \Gamma_1^x = \Gamma_0^x$, откуда следует, что $\Gamma_t^x = \Gamma_0^x$ при всех t . Обозначим через \tilde{Z} график отображения \tilde{a} . В рассматриваемой ситуации асимптотику траекторий, исходящих из точки x , можно изучать с помощью неймановских граней конуса \tilde{Z} (существенно более узких, чем грани конуса Z).

2) $\tilde{T} > 1$. Не умаляя общности, будем считать, что $\tilde{T} = 2$. В этом случае $\Gamma_0^x = \Gamma_2^x$, $\Gamma_0^x \neq \Gamma_1^x$. Через a_i обозначим сужение отображения a на грань Γ_i^x ($i = 0, 1$). По определению подмодели, $a_0(\Gamma_0^x) = \Gamma_1^x$, $a_1(\Gamma_1^x) = \Gamma_2^x = \Gamma_0^x$. Из сказанного вытекает, что $\Gamma_0^x = \Gamma_2^x = \dots = \Gamma_{2t}^x = \dots$, $\Gamma_1^x = \Gamma_3^x = \dots = \Gamma_{2t+1}^x = \dots$.

Через $(a^2)_i$ обозначим сужение отображения a^2 на грань Γ_i^x ($i = 0, 1$). Имеем

$$(a^2)_0 = a_1 \circ a_0, \quad (a^2)_1 = a_0 \circ a_1.$$

Пусть α — темп роста отображения $(a^2)_0$. Тогда найдутся $x_0 \in \Gamma_0^x$ и $p_0 \in (\Gamma_0^x)^*$, для которых выполняются

соотношения

$$\alpha x_0 \in (a^2)_0(x_0), \quad \frac{1}{\alpha} p_0 \in (a^2)'_0(p_0), \quad p_0(x_0) > 0.$$

Так как $(a^2)_0(x_0) = a_1(a_0(x_0))$, то найдется $x_1 \in \Gamma_1^x$ такой, что $\alpha x_0 \in a_1(x_1)$, $x_1 \in a_0(x_0)$. Используя эти соотношения, получим

$$\alpha x_1 \in \alpha a_0(x_0) = a_0(\alpha x_0) \subset a_0 \circ a_1(x_1) = (a^2)_1(x_1).$$

Так как $(a^2)'_0 = (a_1 \circ a_0)' = a_1' \circ a_0'$, то найдется $p_1 \in (\Gamma_1^x)^*$, для которого $(1/\alpha)p_0 \in a_1'(p_1)$, $p_1 \in a_0'(p_0)$. Рассуждая так же, как выше, получим, что $(1/\alpha)p_1 \in (a^2)'_1(p_1)$. Кроме того, из соотношений

$$\begin{aligned} \alpha x_0 &\in a_1(x_1), & x_1 &\in a_0(x_0), \\ \frac{1}{\alpha} p_0 &\in a_1'(p_1), & p_1 &\in a_0'(p_0) \end{aligned}$$

вытекают неравенства $p_0(x_0) \leq p_1(x_1) \leq p_0(x_0)$. Таким образом, $p_0(x_0) = p_1(x_1) > 0$.

Мы показали, что α является темпом роста отображения $(a^2)_1$.

Через Z_i обозначим график отображения a_i ($i = 0, 1$), через π_α — совокупность всех пар вида (p_0, p_1) таких, что $p_1 \in a_0'(p_0)$, $(1/\alpha)p_0 \in a_1'(p_1)$. Положим

$$\begin{aligned} H_{p_0, p_1}^0 &= \{(x, y) \in \Gamma_0^x \times \Gamma_1^x \mid p_0(x) = p_1(y)\} \quad ((p_0, p_1) \in \pi_\alpha), \\ H_{p_0, p_1}^1 &= \{(y, x) \in \Gamma_1^x \times \Gamma_0^x \mid p_1(y) = \frac{1}{\alpha} p_0(x)\} \quad ((p_0, p_1) \in \pi_\alpha), \end{aligned}$$

$$N_\alpha^0 = Z_0 \cap \bigcap_{(p_0, p_1) \in \pi_\alpha} H_{p_0, p_1}^0, \quad N_\alpha^1 = Z_1 \cap \bigcap_{(p_0, p_1) \in \pi_\alpha} H_{p_0, p_1}^1.$$

Множество N_α^i ($i = 0, 1$) уместно назвать неймановской гранью конуса Z_i .

Рассмотрим траекторию

$$\varphi = \left(p_0, p_1, \frac{1}{\alpha} p_0, \frac{1}{\alpha} p_1, \frac{1}{\alpha^2} p_0, \frac{1}{\alpha^2} p_1, \dots \right)$$

модели $(\mathfrak{M}^x)'$, где $(p_0, p_1) \in \pi_\alpha$, и пусть $\chi = (x_t)$ — траектория модели \mathfrak{M}^x , исходящая из точки x и согласованная с траекторией φ . Тогда, как легко следует из

теоремы 16.1, траектория χ ведет себя следующим образом:

$$\rho\left(\frac{(x_{2t}, x_{2t+1})}{\|x_{2t}\|}, N_{\alpha}^0\right) \rightarrow 0, \quad \rho\left(\frac{(x_{2t-1}, x_{2t})}{\|x_{2t-1}\|}, N_{\alpha}^1\right) \rightarrow 0.$$

Нетрудно проверить, что в рассматриваемой ситуации имеет место аналог теоремы о магистрали в слабой форме, показывающий, что процессы (x_t, x_{t+1}) , составляющие конечную оптимальную траекторию $\chi = (x_t)_{t=0}^T$, исходящую из точки x , мало уклоняются от грани N_{α}^0 (при четных t) и грани N_{α}^1 (при нечетных t). Приведем лишь формулировку соответствующей теоремы. Доказательство ее можно провести с помощью тех же рассуждений, что и в теореме 13.3.

Т е о р е м а 16.4. Пусть функционалы $f_0 \in (\Gamma_x^0)^*$ и $f_1 \in (\Gamma_1^x)^*$ обладают следующим свойством: $f_0^i > 0$, если $p_0^i > 0$; $f_0^i = 0$, если $p_0^i = 0$; $f_1^i > 0$, если $f_1^i > 0$; $f_1^i = 0$, если $p_1^i = 0$. (Как обычно, $(\Gamma_i^x)^*$ — конус, сопряженный к Γ_i^x в пространстве $L_i^x = \Gamma_i^x - \Gamma_i^x$.)

Пусть, далее, ε — произвольное положительное число. Тогда для любой конечной траектории $\chi_T = (x_t)_{t=0}^T$, исходящей из x , оптимальной в смысле f_0 , если T четно, и в смысле f_1 , если T нечетно, число процессов (x_t, x_{t+1}) таких, что $\rho\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_{\alpha}^0\right) \geq \varepsilon$ (при четном t) и $\rho\left(\frac{(x_t, x_{t+1})}{\|x_t\|}, N_{\alpha}^1\right) \geq \varepsilon$ (при нечетном t) не превосходит некоторого числа L (не зависящего от длины траектории T).

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

В настоящей главе развивается теоретико-игровой подход к моделям экономики. Понятие оптимальной траектории, которое до сих пор изучалось в этой книге, основано на постулировании некоторого общего критерия оптимальности, выбираемого заранее. При описании ряда экономических ситуаций предположение о существовании такого общего критерия оптимальности является нереальным. Можно предполагать наличие определенных, четко сформулированных целей только у отдельных частей экономической системы. Поэтому здесь естественным образом возникает теоретико-игровая постановка.

В § 17 формулируется бескоалиционная игра нескольких лиц в нормальной форме и доказывается ряд фактов, необходимых для дальнейшего. В следующих двух параграфах изучается весьма общая модель экономического равновесия. В частности, показывается, что состояние равновесия в этой модели обладает экстремальными свойствами, т. е. можно подобрать такой критерий оптимальности, согласно которому состояние равновесия будет оптимальным состоянием.

Заметим, что содержание настоящей главы далеко не исчерпывает всего того, что известно в настоящее время относительно моделей равновесия. В частности, не затрагиваются модели, основанные на играх с коалициями, а также модели, в которых равновесие понимается не в классическом смысле Нэша, а в различных других смыслах, см. Берж [1], Нейман и Моргенштерн [1].

Частично вопросы равновесия рассматриваются также в следующей главе. А именно, здесь изучается равновесие только на конечном временном интервале, ему соответствуют конечные оптимальные траектории. В гл. VI формулируется и изучается модель экономического равновесия на бесконечном временном интервале. Состоянию равнове-

сия этой модели соответствуют бесконечные оптимальные траектории. Модель на бесконечном временном интервале является как раз одним из инструментов изучения бесконечных оптимальных траекторий.

§ 17. ИГРЫ n ЛИЦ

1. **Определение игры.** «Классическая» игра n лиц описывает конфликтную ситуацию, в которой участвует n игроков. Будем обозначать этих игроков числами $1, 2, \dots, n$. Игрок i имеет в своем распоряжении некоторое множество X_i , которое называется *множеством его стратегий*. Кроме того, этот игрок описывается *функцией выигрыша* (функцией полезности) u_i , определенной на

прямом произведении $\prod_{k=1}^n X_k = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

Число $u_i(x_1, \dots, x_n)$ показывает выигрыш, который получает i -й игрок, если первый игрок выбрал свою стратегию x_1 , второй игрок — стратегию x_2, \dots, n -й игрок — стратегию x_n .

Игра n лиц, определенная с помощью множеств стратегий X_i и функций выигрыша u_i , называется *игрой, заданной в нормальной форме* (или просто *игрой в нормальной форме*).

Элемент $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ множества $\prod_{k=1}^n X_k$ называется *состоянием равновесия в смысле Нэша* рассматриваемой нами игры, если для всех $i = 1, 2, \dots, n$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) = \\ = \max_{x_i \in X_i} u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n). \end{aligned}$$

Стратегия \bar{x}_i игрока i , участвующая в состоянии равновесия \bar{x} , называется *оптимальной*.

Смысл приведенных определений заключается в следующем. Предположим, что какой-либо из игроков, скажем i , не воспользовался своей оптимальной стратегией \bar{x}_i , в то время как каждый из остальных игроков k выбрал оптимальную стратегию \bar{x}_k . В этом случае игрок i обес-

печит себе выигрыш не больший, чем если бы он применил стратегию x_i .

Нэш [1] показал, что в случае, когда X_i — компактные выпуклые множества, а u_i — непрерывные вогнутые по x_i функции ($i = 1, 2, \dots, n$), состояние равновесия существует. Ниже мы доказываем теорему, несколько более общую, нежели теорема Нэша.

С точки зрения моделей экономического равновесия представляет интерес рассмотреть некоторое обобщение описанной выше игры n лиц в нормальной форме. Суть этого обобщения заключается в том, что множества стратегий X_i игроков i предполагаются зависящими от выбора этих стратегий, в то время как в «классической» игре они считаются раз и навсегда заданными. Точнее говоря, если игрок 1 выбрал свою стратегию x_1 , игрок 2 — стратегию x_2, \dots , игрок n — стратегию x_n , то множество всех стратегий игрока 1 есть $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, игрока 2 — $X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$, игрока n — $X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$. При этом, разумеется, естественно считать, что $x_i \in X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Считаем, таким образом, что каждый из игроков, выбирая тем или иным способом свои стратегии, может влиять на совокупность всех стратегий как других игроков, так и самого себя.

Приведем формальное описание рассматриваемой игры. В этой игре участвуют n игроков: 1, 2, \dots , n . В распоряжении каждого игрока i имеется некоторое множе-

ство X_i . На множестве $X = \prod_{i=1}^n X_i$ заданы функции выигрыша u_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Кроме того, задано n точечно-множественных отображений $X_i: X \rightarrow \Pi(X_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Элемент $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ множества X называется *состоянием игры*, если $x_i \in X_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). При этом i -я проекция x_i вектора x называется *стратегией* i -го игрока, отвечающей состоянию x , а множество $X_i(x)$ — совокупностью всех стратегий этого игрока, отвечающих указанному состоянию. Рассматриваемую игру будем, так же как и в «классическом» случае, называть *игрой n лиц в нормальной форме*. Итак, по определению, игра n лиц в нормальной форме представляет собой объект

$$G = \{(X_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n, (X_i)_{i=1}^n\}. \quad (17.1)$$

Состоянием равновесия в смысле Нэша игры G , определенной формулой (17.1), назовем вектор $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, обладающий следующими свойствами:

1) $\bar{x}_i \in X_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (т. е. \bar{x} — состояние игры G),

$$2) u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) = \max_{x_i \in X_i(\bar{x})} u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n).$$

Наша ближайшая цель заключается в доказательстве теоремы существования состояния равновесия в игре G . Докажем ее с помощью тех же рассуждений, которыми обычно доказывается теорема Нэша, т. е. используя теорему Какутани о неподвижной точке (см. п. 3 § 3). Предварительно установим некоторые простые свойства точечно-множественных отображений.

2. Вспомогательные предложения.

Предложение 17.1. Пусть Ω_1 и Ω_2 — подмножества конечномерных пространств Y_1 и Y_2 соответственно, причем Ω_1 замкнуто; $a: \Omega_1 \rightarrow \Pi(\Omega_2)$ — ограниченное отображение, непрерывное по Какутани. Пусть, далее, f — непрерывная функция, определенная на множестве Ω_2 . Тогда при любом $x \in \Omega_1$ множество

$$b(x) = \{y \in a(x) \mid f(y) = \max_{z \in a(x)} f(z)\} \quad (17.2)$$

непусто и отображение $b: \Omega_1 \rightarrow \Pi(\Omega_2)$, определенное формулой (17.2), замкнуто.

Доказательство. Из полунепрерывности сверху и ограниченности отображения a следует, что при любом $x \in \Omega_1$ множество $a(x)$ компактно. В силу этого для любого $x \in \Omega_1$ множество $b(x)$ непусто. Покажем, что b — замкнутое отображение. С этой целью рассмотрим функционал φ , определенный на Ω_1 формулой $\varphi(x) = \max_{z \in a(x)} f(z)$. В силу предложения 3.7, функционал φ не-

прерывен на Ω_1 . Пусть теперь (x_n) — последовательность элементов Ω_1 , $y_n \in b(x_n)$, $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$. Покажем, что $y \in b(x)$. Так как $b(x_n) \subset a(x_n)$, то $y_n \in a(x_n)$ и, в силу замкнутости a , справедливо включение $y \in a(x)$. Из определения множества $b(x_n)$ вытекает, что $\varphi(x_n) = f(y_n)$. Используя непрерывность функционалов φ и f и переходя

к пределу, получим, что $f(y) = \varphi(x) = \max_{z \in a(x)} f(z)$, откуда и следует справедливость предложения.

Предложение 17.2. Пусть $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_n$ — компакты в конечномерных пространствах Y_0, Y_1, \dots, Y_n соответственно, $\tilde{\Omega} = \prod_{i=1}^n \Omega_i$; пусть, далее, $a: \Omega_0 \rightarrow \Pi(\tilde{\Omega})$ — замкнутое отображение. Тогда при любом $i = 1, 2, \dots, n$ отображение $\text{Pr}_i a$ замкнуто (по определению, $\text{Pr}_i a$ есть отображение Ω_0 в Ω_i ; если $x \in \Omega_0$, то $(\text{Pr}_i a)(x) = \text{Pr}_i(a(x))$).

Доказательство. По условию предложения, график Z отображения a является замкнутым множеством, лежащим в прямом произведении $\Omega_0 \times \tilde{\Omega} = \Omega_0 \times (\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n)$. Так как каждое из множеств Ω_i ($i = 0, 1, \dots, n$) компактно, то и указанное прямое произведение компактно. Отсюда следует компактность множества Z .

Непосредственно из определения отображения $\text{Pr}_i a$ следует, что график Z_i этого отображения совпадает с проекцией множества Z на пространство $Y_0 \times Y_i$. Так как Z компактно, то и проекция этого множества компактна. Таким образом, Z_i компактно и, стало быть, замкнуто.

Предложение доказано.

Предложение 17.3. Пусть Ω_i ($i = 0, 1, \dots, n$) таковы же, что и в предложении 17.2. Пусть, далее, $a_i: \Omega_0 \rightarrow \Pi(\Omega_i)$ — замкнутое отображение. Тогда отображение $a = \prod_{i=1}^n a_i$ замкнуто (по определению, $\prod_{i=1}^n a_i$ есть

отображение Ω_0 в $\tilde{\Omega} = \prod_{i=1}^n \Omega_i$; если $x \in \Omega_0$, то

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)(x) = \prod_{i=1}^n a_i(x)).$$

Доказательство очевидно.

Условимся в дальнейшем о следующем обозначении. Если $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ — некоторые множества и $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$, то элемент $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ множества $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n$ будем обозначать символом $x^{(i)}$,

через $(x^{(i)}, y)$ — элемент $(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$ из $\prod_{i=1}^n \Omega_i$. В частности, $x = (x^{(i)}, x_i)$.

3. Существование состояния равновесия.

Т е о р е м а 17.1. Пусть игра

$$G = \{(\tilde{X}_i)_{i=1}^n, (u_i)_{i=1}^n, (X_i)_{i=1}^n\}$$

обладает следующими свойствами:

1) каждое из множеств \tilde{X}_i является выпуклым компактом в конечномерном пространстве,

2) каждая функция u_i непрерывна на множестве $\tilde{X} = \prod_{i=1}^n \tilde{X}_i$ и вогнута по переменной x_i (т. е. при любом

$x \in \tilde{X}$ функция $\tilde{u}_i: \tilde{X}_i \rightarrow R_+^1$, определенная формулой $\tilde{u}_i(y) = u_i(x^{(i)}, y)$, является вогнутой),

3) при любом $x \in \tilde{X}$ множество $X_i(x)$ выпукло ($i = 1, 2, \dots, n$),

4) отображение X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) непрерывно *).

Тогда G обладает состоянием равновесия.

Доказательство. Для каждого номера $i=1, 2, \dots, n$ рассмотрим точечно-множественное отображение $a_i: \tilde{X} \rightarrow \Pi(\tilde{X})$, определенное формулой

$$a_i(x) = \{x^{(i)}\} \times X_i(x) \quad (x \in \tilde{X}).$$

Далее рассмотрим отображение $b_i: \tilde{X} \rightarrow \Pi(\tilde{X})$:

$$b_i(x) = \{y \in a_i(x) \mid u_i(y) = \max_{z \in a_i(x)} u_i(z)\} \quad (x \in \tilde{X})$$

и отображение $c_i: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_i$:

$$c_i(x) = \text{Pr}_i b_i(x).$$

Итак, если $x = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \tilde{X}$, то элемент \tilde{y} из \tilde{X}_i входит в множество $c_i(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \tilde{y} \in X_i(x) \text{ и } u_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \tilde{y}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ = \max_{\tilde{z} \in X_i(x)} u_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \tilde{z}, x_{i+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

*) Непрерывность отображения X_i понимается здесь по Какутани. Заметим, впрочем, что, как следует из результатов § 3, в рассматриваемом случае непрерывность по Какутани совпадает с непрерывностью по Хаусдорфу.

Введем, наконец, в рассмотрение отображение $c = \prod_{i=1}^n c_i$, которое отображает \bar{X} в $\Pi(\bar{X})$. Предположим, что это отображение удовлетворяет условиям теоремы Какутани о неподвижной точке. В силу этой теоремы найдется элемент $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n) \in \bar{X}$, для которого выполняется $\bar{x} \in c(\bar{x})$, или, что то же самое,

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in c_1(\bar{x}) \times c_2(\bar{x}) \times \dots \times c_n(\bar{x}).$$

Используя определение отображения c_i , получим, что при всех $i = 1, 2, \dots, n$

$$\bar{x}_i \in X_i(\bar{x}),$$

$$\begin{aligned} u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) = \\ = \max_{y \in X_i(\bar{x})} u_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, y, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n). \end{aligned}$$

Таким образом, точка \bar{x} является искомым состоянием равновесия.

Для завершения доказательства теоремы надо проверить, что отображение c действительно удовлетворяет условиям теоремы Какутани, т. е.

1) при любом $x \in \bar{X}$ множество $c(x)$ непусто, выпукло и включено в \bar{X} ,

2) отображение c замкнуто.

Проверим сначала справедливость утверждения 1). По условию теоремы, множество $a_i(x)$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$ и $x \in \bar{X}$ непусто и выпукло; так как отображение X_i непрерывно, то это множество компактно. Из непрерывности функции u_i вытекает непустота множества $b_i(x)$. Нетрудно проверить, что множество точек, в которых вогнутая функция достигает максимума на выпуклом множестве, является выпуклым, и потому $b_i(x)$ выпукло. Множество $c_i(x)$, являющееся проекцией $b_i(x)$, также непусто и выпукло.

Из сказанного вытекает непустота и выпуклость множества $c(x)$. Отметим, наконец, что, как следует непосредственно из определений, $c(x) \subset \bar{X}$ при всех $x \in \bar{X}$.

Покажем теперь, что отображение c замкнуто. Из непрерывности отображения X_i следует непрерывность отображения a_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Применяя предложе-

ние 17.1, убедимся в замкнутости отображения b_i . Наконец, из предложения 17.2 вытекает замкнутость c_i , и потому из предложения 17.3 — замкнутость c .

Теорема доказана.

§ 18. МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ НА КОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ

Понятие равновесия в экономической системе развивалось постепенно. Сначала под равновесием понимался лишь материальный баланс продукции, затем баланс между спросом и предложением продуктов вместе с балансом финансов. Теперь, в основном благодаря идеям теории игр, стало возможным определять равновесие в экономике как решение в том или ином смысле игры многих лиц, участников экономического процесса. При этом решение подходящим образом сформулированной игры должно обеспечивать, естественно, материальные и финансовые балансы.

Обычно понятие экономического равновесия связывают с наличием противоречивых интересов, с конкуренцией и т. п. Поэтому модели равновесия иногда называют моделями конкурентной или капиталистической экономики. В действительности же, конечно, эти модели описывают некую идеальную, гипотетическую экономику, содержащую в себе как элементы капиталистического, так и элементы социалистического способа ведения хозяйства. В связи с этим содержательная интерпретация моделей равновесия является неоднозначной; мы по ходу изложения будем касаться той или иной содержательной интерпретации, не развивая, однако, ни одну из них в скольконибудь полном виде.

1. Модель Эрроу — Дебре. В этом пункте мы рассмотрим модель ситуации конкурентного равновесия, которая была предложена Эрроу и Дебре [1]. Модель Эрроу — Дебре в изложении ее авторов не связывалась с теорией игр, в частности, с равновесием по Нэшу. Наше изложение опирается на теорию игры n лиц в нормальной форме, что существенно упрощает доказательство существования равновесия и позволяет несколько расширить и видоизменить условия, при которых была доказана теорема существования авторами модели.

Итак, рассматривается замкнутая (не имеющая связей с внешним миром) экономическая система. В системе имеется l видов «продукции». «Продукция» здесь понимается так же, как в § 5, т. е. в число видов «продукции» включаются фонды, трудовые и природные ресурсы, услуги и т. д. Предполагается, что экономика состоит из $m + n + 1$ частей, которые действуют в известной мере независимо друг от друга в том смысле, что ни одна часть не доминирует над другой по теоретико-игровой терминологии. Первые m частей называются *производителями* и описываются множествами $X_1, \dots, X_m \subset R^l$, представляющими собой производственные возможности этих производителей. А именно, $x \in X_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) есть «производственный» способ или процесс, отрицательные компоненты которого показывают затраты, а положительные — выпуск соответствующих видов «продукции». Таким образом, понятие производственного способа здесь обычное, такое же как в линейном программировании (см. § 5).

Следующие n частей называются *потребителями* и описываются с помощью функций полезности, или предпочтения u_1, \dots, u_n , где $u_j: R_+^l \rightarrow R_+^1$ ($j = 1, 2, \dots, n$); число $u_j(y)$ показывает величину полезности от потребления потребителем j набора «продуктов» y .

Наконец, последняя ($m + n + 1$)-я часть называется *ценообразующим органом*; этот орган устанавливает цены на все виды «продукции», т. е. выбирает вектор $p \in (R_+^l)^*$.

Финансовые взаимоотношения между производителями и потребителями определяются с помощью матрицы $\theta = \|\theta_{ij}\|$, где $\theta_{ij} \geq 0$, $\sum_j \theta_{ij} = 1$. Элемент θ_{ij} показывает долю «прибыли» производителя i , которую он отдает потребителю j . Содержательный смысл матрицы распределения «прибылей» может быть различным. Например, можно считать, что производители являются коалициями потребителей. Тогда естественно, что потребитель получает какую-то долю прибылей, приходящихся на коалицию, в которую он входит. Величина этой доли определяется различными механизмами применительно, скажем, к социалистическому и капиталистическому предприятиям.

Итак, суммируя сказанное, получаем, что модель Эрроу — Дебре задается множествами X_1, \dots, X_m , функ-

циями u_1, \dots, u_n и матрицей θ . Кроме того, указываются цели, к которым стремятся все описанные части моделируемой экономической системы. Производители стремятся максимизировать получаемую ими прибыль, потребители максимизируют величину получаемой ими полезности, ценообразующий орган, так же как и производители, максимизирует прибыль от своей деятельности.

Состоянием описанной модели является набор векторов *) $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, p)$ таких, что $x_i \in X_i$,

$$y_j \geq 0, p \geq 0, \sum_{k=1} p_k = 1, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Состояние может относиться к одному моменту времени, если модель рассматривается в фиксированный период времени. Однако если система рассматривается на конечном числе временных интервалов, отличном от единицы, то под «продуктами» понимаются ингредиенты, как они были определены в § 5. Другими словами, «продукты» считаются привязанными к временному интервалу, так что одни и те же «продукты», но в разные моменты времени считаются различными ингредиентами. В этом случае множества X_i и функции u_j относятся также уже не к одному моменту времени, а к нескольким, и состояние системы характеризует на самом деле состояние в несколько последовательных моментов времени. В случае, когда число временных интервалов бесконечно, возникает особая модель, отличная от описываемой модели Эрроу — Дебре. Модель для бесконечного временного интервала рассматривается в § 22. Она тесным образом связана с оптимальными траекториями, изучавшимися в гл. III, IV.

Состояние равновесия модели Эрроу — Дебре есть состояние $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p})$, удовлетворяющее ограничениям

$$\sum_{i=1}^m \bar{x}_i \geq \sum_{j=1}^n \bar{y}_j, \quad (18.1)$$

$$\max_{x_i \in X_i} \bar{p}(x_i) = \bar{p}(\bar{x}_i) \quad (i = 1, \dots, m), \quad (18.2)$$

$$\max u_j(y_j) = u_j(\bar{y}_j) \quad (j = 1, \dots, n). \quad (18.3)$$

) Точнее говоря, p — это функционал ($p \in (R^l)^$). Иногда этот функционал называют *вектором цен*.

В соотношении (18.3) максимум берется по всем y_j , удовлетворяющим неравенству

$$\bar{p}(y_j) \leq \sum_{i=1}^m \theta_{ij} \bar{p}(x_i). \quad (18.4)$$

Неравенства (18.1) представляют собой материальный баланс между спросом и предложением, о котором говорилось в начале параграфа. Здесь $\sum_i \bar{x}_i$ — общая сумма произведенной в состоянии равновесия «продукции» за вычетом производственного потребления, $\sum_j \bar{y}_j$ — общая величина спроса на «продукцию».

Соотношения (18.2) выражают условие, что в состоянии равновесия прибыль производителя максимальна по равновесным ценам. Соотношения (18.3) показывают, что в состоянии равновесия спрос \bar{y}_j потребителя j доставляет максимум функции полезности при бюджетном ограничении (18.4). В неравенстве (18.4), называемом обычно *бюджетным ограничением*, слева стоит сумма расхода денег на покупку продуктов y_j , а справа общий доход, общая сумма денег, которую получает потребитель j в состоянии равновесия.

2. Существование равновесия.

Т е о р е м а 18.1. Пусть для модели Эрроу — Дебре выполнены следующие условия: (а) множества X_i ($i=1, \dots, m$) — выпуклые компакты, содержащие 0; (б) функции u_j ($j=1, \dots, n$) непрерывны и вогнуты. Тогда эта модель обладает состоянием равновесия.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство основано на сведении модели Эрроу — Дебре к игре $m+n+1$ лиц в нормальной форме (см. предыдущий параграф).

1. Сначала заметим, что состояние равновесия не может осуществляться на таких y_j , для которых

$$y_j^k > \sum_i \max_{x_i \in X_i} x_i^k = \hat{y}^k \quad (k=1, \dots, l),$$

поскольку для таких y_j условия (18.1) не могут быть выполнены ни при каких x_1, \dots, x_m . Поэтому в определении состояния равновесия можно считать, что область изменения y_j ($j=1, \dots, n$) не R_+^l , а конусный отрезок Y , определенный неравенствами $0 \leq y \leq \hat{y}$, где $\hat{y} = (\hat{y}^1, \dots, \hat{y}^l)$.

2. Теперь сформулируем игру $m + n + 1$ лиц, которая полностью определяется моделью Эрроу — Дебре, причем первые m игроков — это производители, следующие n игроков — потребители и последний $(m + n + 1)$ -й игрок — ценообразующий орган.

Набор стратегий всех игроков, т. е. состояние игры

$$(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, p),$$

будем обозначать через z . Множества стратегий игроков есть $X_1, \dots, X_m, Y_1(z), \dots, Y_n(z), P$. Здесь X_1, \dots, X_m

не зависят от ситуации z ; $P = \{p \in (R_+^l)^* \mid \sum_{k=1}^l p^k = 1\}$ и

также не зависит от ситуации z ;

$$Y_j(z) = \left\{ y \in Y \mid p(y) \leq \sum_i \theta_{ij} p(x_i) \right\}$$

для всех z таких, что $\sum_i \theta_{ij} p(x_i) \geq 0$; $Y_j(z) = \{0\}$ для

z таких, что $\sum_i \theta_{ij} p(x_i) \leq 0$. Очевидно, что отображение $z \rightarrow Y_j(z)$ является непрерывным.

Функции выигрыша игроков в соответствии со сформулированными выше целями выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} f_i(z) &= p(x_i) & (i = 1, \dots, m), \\ f_{m+j}(z) &= u_j(y_j) & (j = 1, \dots, n), \\ f_{m+n+1}(z) &= p \left(\sum_j y_j - \sum_i x_i \right). \end{aligned}$$

3. Получившаяся игра является игрой в нормальной форме в смысле § 17. Для нее выполнены все условия теоремы 17.1. Поэтому состояние равновесия по Нэшу данной игры существует.

Обозначим точку равновесия рассматриваемой игры через $\bar{z} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p})$. Покажем, что она определяет состояние конкурентного равновесия исходной модели Эрроу — Дебре. По определению состояния равновесия игры, соотношения (18.2) выполняются. Также, по определению, выполнены соотношения (18.3), причем поскольку, по условию теоремы, $0 \in X_i$, то $\bar{p}(x_i) \geq 0$ и $\sum_i \theta_{ij} \bar{p}(x_i) \geq 0$. Остается, таким образом, по-

казать, что для точки равновесия игры выполняются неравенства (18.1). Предположим противное, т. е. пусть найдутся «продукты» с номерами k_1, k_2, \dots, k_r такие, что имеют место соотношения

$$\sum_j \bar{y}_j^{k_s} - \sum_i x_i^{k_s} > 0 \geq \sum_j \bar{y}_j^k - \sum_i x_i^k \quad (s = 1, 2, \dots, r), \tag{18.5}$$

где $k \in \{1, \dots, l\} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$. Тогда поскольку $(m + n + 1)$ -й игрок выбирает такие цены \bar{p} , которые максимизируют функцию $p \left(\sum_j \bar{y}_j - \sum_i x_i \right)$, то имеет место равенство

$$\sum_{s=1}^r \bar{p}^{k_s} = 1, \tag{18.6}$$

а цены всех остальных продуктов, следовательно, равны нулю. Если левую и правую части неравенств (18.4) просуммировать по $j = 1, \dots, n$, то в результате получим неравенство

$$\sum_j \bar{p}(\bar{y}_j) \leq \sum_j \sum_i \theta_{ij} \bar{p}(x_i),$$

правая часть которого равна $\sum_i \bar{p}(x_i)$, поскольку $\sum_j \theta_{ij} = 1$ для всех i . Таким образом, $\sum_j \bar{p}(\bar{y}_j) \leq \sum_i \bar{p}(x_i)$. Соотношения же (18.5), (18.6) дают $\sum_j \bar{p}(y_j) > \sum_i \bar{p}(x_i)$, что приводит к противоречию. Следовательно, неравенства (18.1) также выполняются в точке равновесия игры.

Теорема доказана.

3. Замечания об экономическом смысле теоремы 18.1. Условия выпуклости и компактности множеств X_1, \dots, X_m являются обычными, их оправданность с экономической точки зрения обсуждалась неоднократно. В этой книге в § 5 также говорится об экономическом смысле выпуклости. Условие $0 \in X_i$ для всех i предполагает возможность отсутствия производственной деятельности. Оно гарантирует неотрицательность прибыли у производителей.

Состояние равновесия экономически осмысливается лишь в том случае, когда шах $u_j(y)$ достигается на границе множества $Y_j(z)$. Это обстоятельство можно гарантировать, например, в том случае, когда функции u_j обладают свойством ненасыщаемости, которое

заключается в следующем: для любого $y \in R_+^l$ существует $y'_j \in R_+^l$ такой, что $u_j(y') > u_j(y)$.

Более того, если функции u_j ненасыщаемы, в состоянии равновесия выполняются равенства $\bar{p}(\bar{y}_j) = \sum_i \theta_{ij} \bar{p}(\bar{x}_i)$ ($j = 1, \dots, n$).

По определению состояния равновесия $\bar{p}(\bar{y}_j) \leq \sum_i \theta_{ij} \bar{p}(\bar{x}_i)$. Стро-

гое неравенство $\bar{p}(\bar{y}_j) < \sum_i \theta_{ij} \bar{p}(\bar{x}_i)$ означает, что найдется «про-

дукт» k , для которого $\bar{y}_j^k = \hat{y}^k$, поскольку $\max u_j$ достигается на границе $Y_j(\bar{z})$. Однако это противоречит определению состояния

равновесия, следовательно, $\bar{p}(\bar{y}_j) = \sum_i \theta_{ij} \bar{p}(\bar{x}_i)$, откуда $\sum_j \bar{p}(\bar{y}_j) =$

$= \sum_i \bar{p}(\bar{x}_i)$. Последнее равенство представляет собой финансовый

баланс. Наличие финансового баланса вместе с материальным балансом (18.1) позволяет сделать вывод, что перепроизводимые продукты в состоянии равновесия имеют нулевую цену.

§ 19. КОНКУРЕНТНОЕ РАВНОВЕСИЕ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

В этом параграфе будет показано, что состояние равновесия модели Эрроу — Дебре доставляет максимум некоторой функции на множестве ситуаций, причем эта функция является взвешенной суммой функций предпочтения потребителей. Этот факт обосновывает, с одной стороны, полезность понятия состояния равновесия, с другой стороны, указывает на возможность достижения некоторой общей цели с помощью разрозненных децентрализованных действий.

1. Видоизменение первоначальной модели. Рассмотрим модель Эрроу — Дебре, описанную в предыдущем параграфе. Считаем, что функции полезности u_j ($j = 1, \dots, n$) обладают свойством ненасыщаемости. Переформулируем эту модель таким образом, чтобы состояния равновесия новой модели являлись состояниями равновесия и старой, но при этом функции предпочтения потребителей были бы линейными и весьма специального вида.

В новой модели производителями будут являться как производители, так и потребители старой модели. К «продуктам» с номерами $1, \dots, l$ добавляются условные вспомогательные «продукты» с номерами $l + 1, \dots, l + n$, где

количество продукта $l + j$ представляет собой величину «эффекта от потребления» j -го потребителя старой модели. Множества производственных возможностей производителей определяются следующим образом *):

$$\begin{aligned} \hat{X}_i &= \{\hat{x}_i \in R^{l+n} \mid \hat{x}_i = (x_i, 0, \dots, 0), x_i \in X_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \hat{X}_{m+j} &= \{\hat{x}_{m+j} \in R^{l+n} \mid \hat{x}_{m+j} = (-y_j, 0, \dots, 0, \gamma_j, 0, \dots, 0), \\ & 0 \leq \gamma_j \leq u_j(y_j), y_j \in Y\} \quad (j = 1, 2, \dots, n); \end{aligned}$$

в векторе \hat{x}_{m+j} число γ_j стоит на $(l + j)$ -м месте.

Потребителей в новой модели столько же, сколько в старой. Занумеруем их числами s ($s = 1, \dots, n$). Функция предпочтения φ_s потребителя s определяется так: $\varphi_s(\hat{y}_s) = \hat{y}_s^{l+s}$. Иначе говоря, потребитель s стремится максимизировать количество $(l + s)$ -го «продукта».

Матрица распределения прибылей $\hat{\theta} = \|\hat{\theta}_{i,s}\|$ новой модели определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_{i,s} &= \hat{\theta}_{i,s} \quad \text{для } i = 1, \dots, m, s = 1, \dots, n, \\ \hat{\theta}_{m+j,s} &= \begin{cases} 1, & \text{если } j = s, \\ 0, & \text{если } j \neq s \end{cases} \quad (j = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что построенная модель Эрроу — Дебре удовлетворяет условиям теоремы 18.1. Следовательно, состояние равновесия в этой модели существует. Обозначим его через $\hat{z}^* = (\hat{x}_1^*, \dots, \hat{x}_{m+n}^*, \hat{y}_1^*, \dots, \hat{y}_n^*, \hat{p}^*)$. Множество всех состояний равновесия обозначим через \hat{E} . Введем отображение φ , согласно которому каждой точке $\hat{z}^* \in \hat{E}$ сопоставляется точка $z^* = (x_1^*, \dots, x_m^*, y_1^*, \dots, y_n^*, p^*)$, где векторы x_1^*, \dots, x_m^*, p^* получаются из векторов $\hat{x}_1^*, \dots, \hat{x}_m^*, \hat{p}^*$ отбрасыванием последних n координат, векторы y_1^*, \dots, y_n^* получаются из векторов $\hat{x}_{m+1}^*, \dots, \hat{x}_{m+n}^*$ отбрасыванием последних n координат и умножением на -1 . Образ множества \hat{E} при отображении φ обозначим через $\varphi\hat{E}$, а множество состояний равновесия старой модели через E .

Л е м м а 19.1. *Имеет место включение $\varphi\hat{E} \subset E$.*

*) Вектор $\hat{x} \in R^{l+n}$ нам иногда будет удобно обозначать так: $\hat{x} = (x, \hat{x}^{l+1}, \dots, \hat{x}^{l+n})$, где $x = (x^1, \dots, x^l)$ — вектор из R^l .

Доказательство. Выберем произвольно точку $z^* \in \varphi \hat{E}$. Необходимо показать, что для нее выполняются соотношения (18.1) — (18.3), определяющие состояние равновесия. По определению состояния равновесия, для новой модели имеем

$$\sum_{s=1}^{m+n} \hat{x}_s^* \geq \sum_{j=1}^n \hat{y}_j^*, \quad (19.1)$$

$$\hat{p}^*(\hat{x}_s^*) = \max_{x \in \hat{X}_s} \hat{p}^*(x) \quad (s = 1, \dots, m+n), \quad (19.2)$$

$$e_{l+j}(\hat{y}_j^*) = \max e_{l+j}(y). \quad (19.3)$$

В последнем соотношении e_{l+j} есть $(l+j)$ -й орт в пространстве $(R^{l+n})^*$, максимум берется по всем $y \geq 0$ таким, что выполнено бюджетное ограничение

$$\hat{p}^*(y) \leq \sum_{s=1}^{m+n} \theta_{sj} \hat{p}^*(x_s^*). \quad (19.4)$$

Соотношение (19.1) можно трактовать как $l+n$ скалярных неравенств. Первые l из них показывают, что для z^* справедливо соотношение (18.1). Далее, первые m равенств из (19.2) влекут соотношения (18.2) для z^* , поскольку для любого $x \in \hat{X}_s$ ($s = 1, \dots, m$) последние n координат равны нулю. Установить тот факт, что выполняется соотношение (18.3), чуть сложнее. Перепишем $(m+j)$ -е соотношение (19.2) в виде

$$\alpha_j \mu_j(y_j^*) - p^*(y_j^*) = \max_{y \in Y} (\alpha_j \mu_j(y) - p^*(y)), \quad (19.5)$$

где через α_j обозначена $(l+j)$ -я компонента вектора цен \hat{p}^* . Согласно замечанию, приведенному в п. 3 § 18, бюджетное ограничение (19.4) в точке равновесия превращается в равенство, т. е.

$$\alpha_j \mu_j(y_j^*) = \sum_{i=1}^m \theta_{ij} p^*(x_i^*) + (\alpha_j \mu_j(y_j^*) - p^*(y_j^*)).$$

Здесь справа стоит общая величина дохода j -го потребителя новой модели, а слева его расход на покупку $(l+j)$ -го

«продукта». Из этого равенства следует, что

$$\sum_{i=1}^m \theta_{ij} p^*(x_i^*) = p^*(y_j^*), \quad (19.6)$$

т. е. для z^* выполняется бюджетное ограничение (18.4). Из равенства (19.6) следует, что если в соотношении (19.5) максимум брать не по множеству Y , а добавить еще бюд-

жетное ограничение $p^*(y) \leq \sum_{i=1}^m \theta_{ij} p^*(x_i^*)$, то это соотношение сохранится. Отсюда вытекает, что

$$\max_{y \in Y, p^*(y) \leq \sum_{i=1}^m \theta_{ij} p^*(x_i^*)} u_j(y) = u_j(y_j^*),$$

т. е. соотношение (18.3). Лемма доказана.

2. Оптимальность состояния равновесия.

Т е о р е м а 19.1. При условиях теоремы 18.1 состояние конкурентного равновесия $z^* \in \varphi \hat{E}$ доставляет решение следующей задаче выпуклого программирования (задача I).

Найти $\max \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j(y_j)$ при условиях:

а) $x_i \in X_i$ ($i = 1, \dots, m$), $y_j \in Y$ ($j = 1, \dots, n$),

б) $\sum_{i=1}^n y_j \leq \sum_{i=1}^n x_i$.

Здесь, как и выше, α_j — равновесная цена продукта $n+j$ в преобразованной модели.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим задачу выпуклого программирования, фигурирующую в формулировке теоремы, в стандартной форме задачи о нахождении крайней точки пересечения оси с выпуклым конусом. Конус $Z \subset R^{n+m+l+1}$ строится следующим образом:

$$Z = \left\{ z \in R^{n+m+l+1} \mid z = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, -y_j, \gamma_j) + \sum_{i=1}^m \lambda_{n+i} (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, x_i, 0) - \sum_{k=1}^{n+m+l+1} \nu_k e_k \right) \right\}.$$

Здесь $\lambda_s \geq 0$ ($s = 1, \dots, m+n$); $v_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, n+m+l+1$); $0 \leq \gamma_j \leq \alpha_j \mu_j(y_j)$, $y_j \in Y$, $x_i \in X_i$; в первой сумме -1 стоит на j -м месте, а во второй сумме на $(n+i)$ -м месте, e_k — орт, соответствующий k -й координатной оси. Легко проверить, что Z — выпуклый телесный конус. В частности, выпуклость следует из выпуклости множеств X_i и вогнутости функций μ_j . Нетрудно проверить замкнутость этого конуса. Нам она, однако, в дальнейшем не понадобится.

Задача I эквивалентна следующей задаче (задаче II).

Найти максимальное число μ при выполнении условий:

$$\underbrace{(-1, -1, \dots, -1)}_{n+m}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_l, \mu \in Z.$$

Действительно, пусть $\bar{\mu}$ есть решение задачи II. Имеем $(-1, \dots, -1, 0, \dots, 0, \bar{\mu}) =$

$$= \left(\sum_{j=1}^n (\dots, -1, \dots, -\bar{y}_j, \gamma_j) + \sum_{i=1}^m (\dots, -1, \dots, \bar{x}_i, 0) - \sum_k \bar{v}_k e_k \right),$$

откуда следует $\bar{y}_j \in Y$, $\bar{x}_i \in X_i$, $\sum_j \bar{y}_j \leq \sum_i \bar{x}_i$, т. е. $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ является допустимой точкой задачи I. Пусть теперь $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ доставляет решение задаче I. Тогда, по определению конуса Z ,

$$\left(\sum_j (\dots, -1, \dots, -\bar{y}_j, \alpha_j \mu(\bar{y}_j)) + \sum_i (\dots, -1, \dots, \bar{x}_i, 0) - \sum_k \tilde{v}_k e_k \right) \in Z.$$

Иначе говоря, решение задачи I представляет собой допустимый вектор в задаче II. Следовательно, задачи I и II эквивалентны, в частности, $\bar{\mu} = \sum_j \alpha_j \mu_j(\bar{y}_j)$. Покажем теперь,

что состояние конкурентного равновесия из множества ΦE доставляет решение задаче II. По определению,

$$z^* = \left(\sum_j (\dots, -1, \dots, -y_j^*, \alpha_j \mu_j(y_j^*)) + \sum_i (\dots, -1, \dots, x_i^*, 0) - \sum_k v_k^* e_k \right) \in Z;$$

здесь $(x_1^*, \dots, x_m^*, y_1^*, \dots, y_n^*)$ — векторы, определяющие состояние равновесия. Поэтому $\sum_j \alpha_j u_j(y_j^*) \leq \bar{\mu}$. Предположим противное тому, что надо доказать, т. е. пусть $\sum_j \alpha_j u_j(y_j^*) < \bar{\mu}$. Рассмотрим гиперплоскость $H \subset R^{m+n+1}$, проходящую через начало координат и определенную функционалом

$$\pi = (\alpha_1 u_1(y_1^*) - p^*(y_1^*), \dots, \alpha_n u_n(y_n^*) - p^*(y_n^*), p^*(x_1^*), \dots, p^*(x_m^*), p^*, 1).$$

Поскольку, по определению состояния равновесия, $p^*(x_i^*) = \max_{x \in X_i} p^*(x)$ и

$$\alpha_j u_j(y_j^*) - p^*(y_j^*) = \max_{y \in Y} (\alpha_j u_j(y) - p^*(y)),$$

то $\pi(z) \leq 0$ для всех $z \in Z$ и, кроме того, $\pi(z^*) = 0$.

Равенство $\pi(z^*) = 0$ можно записать в виде

$\sum_{k=1}^{n+m} \pi_k = \sum_j \alpha_j u_j(y_j^*)$. Поскольку для вектора \bar{z} , доставляющего решение задаче II, выполнено $\pi(\bar{z}) \leq 0$, то

$$\sum_{k=1}^{m+n} \pi_k \geq \bar{\mu}, \text{ следовательно, } \bar{\mu} = \sum_j \alpha_j u_j(y_j^*).$$

3. Замечание к теореме 19.1. Теорема 19.1 показывает, что равновесие по Нэшу является оптимальным, т. е. лежит на границе множества допустимых ситуаций. Этот факт обосновывает известное положение экономической теории о том, что при простом товарном производстве автоматически обеспечивается сбалансированное и в некотором смысле гармоничное развитие экономики. Дело в том, что в условиях простого товарного производства потребители и производители достаточно мелки и описание их поведения по Нэшу представляется достаточно реалистичным. Теорема 19.1 устанавливает также экономический смысл весов α_j , с которыми суммируются индивидуальные целевые функции потребителей. А именно, из соотношений (19.2) для $j = m + 1, \dots, m + n$ при дополнительном предположении о гладкости вытекает, что $\nabla u_j(y) = p^*/\alpha_j$ в точке y_j^* , где ∇ обозначает градиент. Следовательно, коэффициент α_j показывает, во сколько раз цена единицы продукции больше предельной полезности этой продукции для потребителя j . Очевидно, что чем больше доход $\sum \theta_{ij} p^*(x_i^*)$ потребителя j в состоянии равновесия, тем больше коэффициент α_j по сравнению с другими коэффициентами.

ГЛАВА VI

**МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ
ПОТРЕБЛЕНИЯ В ЯВНОМ ВИДЕ**

До сих пор модели экономической динамики, в частности общая технологическая модель (8.1), изучались с чисто производственной точки зрения. Процесс потребления продукции населением в таких моделях описывается подобно производственным процессам и формально ничем не отличается от последних. Такое представление процесса конечного потребления оказывается с экономической точки зрения недостаточно адекватным действительности, в частности, понятие оптимальности траектории непосредственно не связывается с потребностями населения, являющимися конечной целью производства.

В настоящей главе рассматриваются модели, в которых процесс потребления продукции населением выделяется особо и дается другое определение оптимальности траекторий. При этом для моделей с конечным временным интервалом (моделей первого рода) оба понятия оптимальности совпадают. Для моделей же с бесконечным временным интервалом (моделей второго рода) вводимое здесь понятие оптимальности является частным случаем понятия оптимальности, рассмотренного в гл. III. Поэтому, в основном, в настоящей главе рассматриваются модели на бесконечном временном интервале, ибо возникающие для них проблемы носят в ряде случаев существенно иной характер. Изучается также понятие магистрали для моделей с потреблением, которое также представляет собой новый объект, отличный от уже рассматриваемого понятия магистрали. По ходу изложения дается сравнение этих новых понятий, с рассмотренными ранее.

Заметим, что при изучении свойств траекторий в этой главе существенно используется теоретико-игровой подход, в частности результаты гл. V.

§ 20. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ. СВЯЗЬ С ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ

1. Определение модели; оптимальные траектории. Будем рассматривать модели экономической динамики, технологические возможности которых описываются с помощью обобщенной технологической модели \mathfrak{M} типа модели (11.12), изучавшейся в п. 5 § 11. Точнее говоря,

$$\mathfrak{M} = \{ \{0, 1, \dots\}, (X_t)_{t=0}^{\infty}, (K_t)_{t=0}^{\infty}, (\Omega_t)_{t=0}^{\infty} \}, \quad (20.1)$$

где $X_t = R^n$, $K_t = R_+^n$ ($t = 0, 1, 2, \dots$), Ω_t — выпуклое замкнутое множество, лежащее в $R_+^n \times R_+^n$, причем $(0, 0) \in \Omega_t$, $(0, y) \notin \Omega_t$ при $y \neq 0$, $\text{Pr}_2 \Omega_t \cap \text{int } R_+^n \neq \emptyset$. Через a_t обозначим точечно-множественное отображение, имеющее графиком множество Ω_t ; через $a_{\tau, t}$ ($\tau > t$) обозначается отображение $a_{\tau} \circ a_{\tau-1} \circ \dots \circ a_t$. Считаем в дальнейшем, что отображения a_t монотонно возрастают (т. е. $a_t(x) \supseteq a_t(x')$, если $x, x' \in \text{Pr}_1 \Omega_t$ и $x \geq x'$). В этой ситуации, как следует из предложения 11.5, a_t можно распространить с сохранением его свойств на весь конус R_+^n . Это позволяет, если возникает надобность, считать, что a_t заданы на всем конусе R_+^n , и применять к изучению этих отображений результаты § 4. То же, разумеется, относится и к отображениям $a_{\tau, t}$. Как и прежде, точка $(x, y) \in \Omega_t$ интерпретируется как «производственный» процесс в широком смысле, перерабатывающий набор «продуктов» x в набор y в течение единичного временного интервала. Понятие траектории в описываемой сейчас модели отличается от ранее употреблявшегося понятия траектории в технологической модели, что связано именно с необходимостью непосредственного учета конечного потребления. *Траектория* модели с учетом потребления в явном виде представляет собой последовательность (x_t) , удовлетворяющую следующим условиям:

$$(x_t, x_{t+1} + c_{t+1}) \in \Omega_t, \quad \text{где } c_t \geq 0, t = 0, 1, \dots \quad (20.2)$$

Последовательность $(c_t)_{t=1}^{\infty}$, соответствующую траектории (x_t) , будем называть *траекторией потребления*. Очевидно, что одной траектории (x_t) может соответствовать несколько последовательностей (c_t) и наоборот. Иногда нам будет удобно понимать под траекторией последовательность

пар $(x_t, c_t)_{t=0}^{\infty}$ (здесь положено $c_0 = 0$, кроме того, предполагается, что выполнено соотношение (20.2)). Приведем теперь простой пример.

Пример 1. В качестве примера рассмотренной модели укажем классическую однопродуктовую модель экономической динамики, являющуюся предметом изучения многих авторов. В этой однопродуктовой модели

$$\Omega_t = \{(x, y) \in R_+^1 \times R_+^1 \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

для всех t , здесь f — неотрицательная вогнутая неубывающая функция, определенная на $[0, \infty)$. Экономическая интерпретация модели следующая. Число x измеряет количество продукта, приходящегося на душу населения, число $f(x)$ показывает количество продукта, приходящегося на душу населения, которое может быть получено в течение единичного временного интервала, если обладать в начале этого интервала количеством продукта x и трудом (рабочей силой) в количестве единица. Тогда траектория потребления (c_t) представляет собой последовательность объемов продукции, приходящейся на душу населения, во времени.

Оптимальность траекторий в определенной сейчас модели зависит лишь от последовательности векторов потребления (c_t) и вычисляется с помощью последовательности функций $U = (u_t)_{t=0}^{\infty}$, где $u_t: R_+^1 \rightarrow R_+^1$. Функция u_t называется *функцией полезности* или *предпочтения* для интервала времени t . В дальнейшем предполагается, что $u_t (t = 0, 1, \dots)$ — вогнутая возрастающая непрерывная функция, причем *) $u_t(0) = 0$.

«Полезность» всей траектории $c = (c_t)_{t=0}^{\infty}$ будем обозначать через $\gamma(c)$, где $\gamma(c) = \sum_{t=0}^{\infty} u_t(c_t)$, а «полезность» ее t -куска через $\gamma_t(c)$:

$$\gamma_t(c) = \sum_{\tau=0}^t u_{\tau}(c_{\tau}).$$

Обозначим еще множество всех траекторий потребления, соответствующих всевозможным траекториям, выходящим из начального состояния x_0 через $C(x_0)$.

*) Некоторые авторы рассматривают функции полезности, принимающие, может быть, отрицательные значения. Мы, однако, ограничиваемся рассмотрением случая, когда $u_t(x) \geq 0$ для всех $x \in R_+^1$.

Траектория $(\bar{x}_t)_{t=0}^{\infty}$ или соответствующая ей траектория (\bar{c}_t) называется *U-оптимальной*, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\gamma_t(\bar{c}) - \gamma_t(c)) \geq 0 \quad (20.3)$$

для всех траекторий $c \in C(x_0)$.

В случае, когда «полезность» $\gamma(c)$ принимает лишь конечные значения на множестве $C(x_0)$, формула (20.3) превращается в обычную $\gamma(\bar{c}) = \max_{c \in C(x_0)} \gamma(c)$.

Резюмируя сказанное, отметим, что модель с учетом потребления в явном виде полностью определяется обобщенной технологической моделью \mathfrak{M} , имеющей вид (20.1), и набором функций полезности $U = (u_t)$. Будем обозначать эту модель символом (\mathfrak{M}, U) . Основной вопрос, возникающий при изучении модели (\mathfrak{M}, U) , заключается в следующем: выяснить, когда существуют *U-оптимальные траектории*, и описать их свойства.

2. Существование *U-оптимальных траекторий.* Простые примеры показывают, что *U-оптимальные траектории* существуют не всегда.

Пример 2. Пусть

$$\Omega_t = \{(\mu, \nu) \in R_+^1 \times R_+^1 \mid \mu \geq 0, 0 \leq \nu \leq \mu\},$$

$u_t(c) = c$ для всех $t, \rho > 1$. Пусть $x_0 = 1$, тогда если *U-оптимальная траектория* $((x_t, c_t))$ существует, то она должна иметь вид

$$\chi = ((1, 0), (\rho - c_1, c_1), ((\rho - c_1)\rho - c_2, c_2), \dots).$$

Если $c_t = 0$ для всех t , то очевидно, что эта траектория не оптимальна. Пусть $c_\tau > 0$ для некоторого τ . Рассмотрим траекторию

$$\chi' = ((1, 0), (\rho - c_1, c_1), ((\rho - c'_1)\rho - c'_2, c'_2), \dots),$$

где $c'_\tau = 0$, $c'_{\tau+1} = c_\tau \rho + c_{\tau+1}$, $c'_t = c_t$ ($t = 1, 2, \dots, \tau - 1, \tau + 2, \dots$). Очевидно, что $\gamma_t(c') = \gamma_t(c) + c_\tau(\rho - 1)$ при всех $t > \tau$. Таким образом, *U-оптимальной траектории* в рассмотренной модели не существует.

Ситуация, описываемая данным примером, типична для несуществования оптимальных траекторий. Именно, если максимальный темп роста экономики больше, чем темп падения полезности во времени, то всегда выгодно оттягивать потребление на далекий срок. В частности

если временной период конечен, то в этом случае оптимальной является такая политика потребления, когда во все моменты времени, кроме последнего, $c_t = 0$, а в последний момент вся продукция идет на потребление. Если же период времени бесконечен, то момент потребления выгодно откладывать все дальше и в пределе, следовательно, никогда не потреблять.

Возможны и другие ситуации, в которых U -оптимальные траектории не существуют. Например, если на потребление можно отдать лишь конечную величину продукции, то может оказаться, что оптимальным является распределение этой величины равномерно по периодам времени. Тогда при бесконечном числе таких периодов в пределе опять получаем траекторию, в которой потребление равно нулю. Оформим эту ситуацию в виде примера.

Пример 3. Пусть

$$\Omega_t = \{(x, y) \in R_+^1 \times R_+^1 \mid x \geq y\}, \quad u_t(c) = u(c) \quad (t = 1, 2, \dots),$$

где u — строго вогнутая возрастающая функция, например, $u(c) = \sqrt{c}$. Любая траектория потребления $c = (c_t)$ удовлетворяет,

$$\text{очевидно, неравенству } \sum_{t=0}^{\infty} c_t \leq x_0.$$

Пусть траектория c такова, что $c_t \neq c_{t+1}$. В силу строгой вогнутости функции u имеем

$$u(c_t) + u(c_{t+1}) < 2u\left(\frac{c_t + c_{t+1}}{2}\right).$$

Следовательно, траектория c' , отличающаяся от c только элементами c'_t и c'_{t+1} , равными $\frac{c_t + c_{t+1}}{2}$, имеет большую общую «полезность», чем траектория c . Таким образом, для оптимальной траектории должно иметь место соотношение $c_t = c_{t+1}$ для всех t . Это

соотношение вместе с неравенством $\sum_{t=0}^{\infty} c_t \leq x_0$ приводит к тому, что $c_t = 0$ для всех t ; значит, U -оптимальной траектории не существует.

Имеет место

Предложение 20.1. Для любой модели (20.1) и любого начального состояния x_0 множество $S(x_0)$ является выпуклым компактом в пространстве s всех последовательностей из элементов R^n .

Доказательство. Выпуклость $C(x_0)$ очевидным образом следует из выпуклости множеств Ω_t . Покажем, что $C(x_0)$ компактно.

Пусть $c = (c_t) \in C(x_0)$ и последовательность (x_t) такова, что $x_{t+1} + c_{t+1} \in a_t(x_t)$ ($t = 0, 1, \dots$). Имеем $x_{t+1} \in na_t(x_t)$, $c_{t+1} \in na_t(x_t)$. Рассуждая подобным образом, получим, что

$$x_t \in na_{t-1}(\hat{x}_{t-1}), x_{t-1} \in na_{t-2}(x_{t-2}), \dots, \hat{x}_1 \in na_0(x_0).$$

Как было показано в п. 2 § 11,

$$n(a^{(1)} \circ a^{(2)}) = na^{(1)} \circ na^{(2)}$$

(здесь $a^{(1)}, a^{(2)}$ — вогнутые замкнутые гейловские отображения), и потому $x_t \in na_{t,0}(x_0)$. Таким образом,

$$c_{t+1} \in na_{t+1}(x_t) \subset na_{t+1}(na_{t,0}(x_0)) = na_{t+1,0}(x_0).$$

В силу предложения 4.6 множество $na_{t+1,0}(x_0)$ ограничено, а потому и проекция $\text{Pr}_{t+1} C(x_0)$ множества $C(x_0)$ на $(t+1)$ -«координатную ось» ограничена ($t = 0, 1, \dots$). Для завершения доказательства осталось проверить, что множество $C(x_0)$ замкнуто в s (т. е. замкнуто относительно покоординатной сходимости). Пусть $c^{(k)} = (c_t^{(k)}) \in C(x_0)$, $c_t^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} c_t$ ($t = 1, 2, \dots$). Найдем последовательности $(x_t^{(k)})_{t=0}^\infty$ такие, что $x_0^{(k)} = x_0$ и

$$x_{t+1}^{(k)} + c_{t+1}^{(k)} \in a_t(x_t^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \dots, t = 0, 1, \dots).$$

Множества $\{x_t^{(1)}, x_t^{(2)}, \dots, x_t^{(k)}, \dots\}$ ограничены при всех t , и потому, используя диагональный процесс, можно найти возрастающую последовательность индексов $k_1, k_2, \dots, k_i, \dots$ такую, что существуют пределы $\lim_{i \rightarrow \infty} x_t^{(k_i)} = x_t$ ($t = 0, 1, \dots$). Имеем

$$x_{t+1} + c_{t+1} \in a_t(x_t).$$

Таким образом, $(c_t) \in C(x_0)$ и, стало быть, $C(x_0)$ замкнуто.

Предложение доказано.

Используя предложение 20.1 и теорему Вейерштрасса о том, что полунепрерывная сверху функция на компакте достигает максимума, можно получать теоремы о существовании U -оптимальных траекторий, наложив те

или иные условия на последовательность функций полезности $U = (u_t)$ с тем, чтобы $\gamma(c)$ принимала конечные значения на $C(x_0)$ и была полунепрерывной сверху.

Например, важным для экономических приложений и широко распространенным классом последовательностей U является следующий.

Задана функция полезности u , не зависящая от времени, и последовательность неотрицательных чисел $\lambda = (\lambda_t)_{t=0}^{\infty}$, где λ_t имеет смысл *дисконтирующего множителя*, с помощью которого полезность, измеренная функцией u в момент t , «приводится» к начальному моменту времени. Тогда последовательность $U = (u_t)$ определяется так: $u_t = \lambda_t u$ ($t = 0, 1, 2, \dots$).

Т е о р е м а 20.1. Пусть точка $x_0 \in \text{Pr}_1 \Omega_0$ обладает тем свойством, что

$$\sup_t \sup_{y \in a_{t,0}(x_0)} \|y\| = R < \infty. \quad (20.4)$$

Если последовательность $U = (u_t)$ такова, что $u_t = \lambda_t u$ и $\sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t < \infty$, то U -оптимальная траектория, исходящая из точки x_0 , существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $c = (c_t) \in C(x_0)$, то, как следует из (20.4), $\|c_t\| \leq R < \infty$ ($t = 1, 2, \dots$). Так как функция u непрерывна, то она ограничена на множестве $\{x \in R_+^n \mid \|x\| \leq R\}$, и, стало быть, найдется число R' такое, что $u(c_t) \leq R'$ для всех $c \in C(x_0)$. Из условия

$\sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t < \infty$ теперь следует, что $\gamma(c) < \infty$ для всех $c \in C(x_0)$. Покажем, что функция γ непрерывна на $C(x_0)$.

Пусть $c^{(k)} \in C(x_0)$ ($k = 1, 2, \dots$) и $c^{(k)} \rightarrow \bar{c}$. Выберем число $\varepsilon > 0$ и найдем натуральное T , при котором вы-

полняется соотношение $\sum_{t=T+1}^{\infty} \lambda_t < \varepsilon$. Из непрерывности

функции u вытекает, что функция $\gamma_T : \bar{c} \rightarrow \sum_{t=1}^T \lambda_t u(\bar{c}_t)$ непрерывна, и потому найдется число K такое, что при

$k > K$ выполняется

$$|\gamma_T(c^{(k)}) - \gamma_T(\bar{c})| < \varepsilon.$$

В то же время при всех k

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t=T+1}^{\infty} \lambda_t u(c_t^{(k)}) - \sum_{t=T+1}^{\infty} \lambda_t u(\bar{c}_t) \right| &\leq \\ &\leq \sum_{t=T+1}^{\infty} \lambda_t |u(c_t^{(k)}) - u(\bar{c}_t)| \leq \varepsilon \cdot 2R'. \end{aligned}$$

Таким образом, при $k > K$

$$|\gamma(c^{(k)}) - \gamma(\bar{c})| < \varepsilon(2R' + 1),$$

откуда и вытекает непрерывность γ . Так как, в силу предложения 20.1, $C(x_0)$ компактно, то по теореме Вейерштрасса γ достигает максимума на $C(x_0)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Условие (20.4) заведомо выполнено, если найдется ограниченное множество Ω такое, что $\Omega_t \subset \Omega$ при всех t .

Заметим далее, что в примере 2 $\gamma(c)$ равна бесконечности для некоторых $c \in C(x_0)$, а в примере 3 γ представляет собой функцию, принимающую, очевидно, лишь конечные значения на $C(x_0)$. Хотя

в этом примере функция $\gamma: c \rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} c_t$ очень проста, однако она не

является непрерывной в метрике пространства s . Действительно, рассмотрим последовательность $(c^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$c^{(k)} = \left(\underbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_k, 0, 0, \dots, 0, \dots \right).$$

Очевидно, что $c^{(k)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и $\gamma(c^{(k)}) = 1$, тогда как $\gamma(0) = 0$.

Теорема 20.1 дает решение вопроса о существовании U -оптимальных траекторий для весьма узкого класса последовательностей U . Для получения более содержательных результатов воспользуемся аппаратом, разработанным в предыдущих главах. Для этого надо прежде всего указать на связь между U -оптимальными и эффективными (оптимальными) траекториями, свойства которых изучены в этой книге достаточно подробно.

3. Характеристика U -оптимальных траекторий. В этом пункте воспользуемся приемом, который позволит свести изучение модели (\mathfrak{M}, U) к изучению некоторой обобщенной технологической модели, которая в свою очередь с помощью суперлинейного расширения приводится к модели типа Неймана — Гейла.

Построим с помощью модели (\mathfrak{M}, U) обобщенную технологическую модель (см. п. 5 § 11)

$$\mathfrak{M}_U = \{\{0, 1, \dots\}, (X_t)_{t=0}^\infty, (K_t)_{t=0}^\infty, (\Omega_t^u)_{t=0}^\infty\}, \quad (20.5)$$

где $X_t = R^n \times R^1$, $K_t = R_+^n \times R_+^1$ ($t = 0, 1, \dots$), а множество Ω_t^u определяется следующим образом:

$$\Omega_t^u = \{z \in (R_+^n \times R_+^1) \times (R_+^n \times R_+^1) \mid z = ((x, \gamma), (y - c, \gamma')); \\ (x, y) \in \Omega_t, 0 \leq c \leq y, 0 \leq \gamma' \leq \gamma + u_{t+1}(c), \gamma \geq 0\}.$$

Из выпуклости Ω_t и вогнутости функции u_t легко следует, что Ω_t^u — выпуклое множество. Используя замкнутость Ω_t и непрерывность u_t , нетрудно проверить, что Ω_t замкнуто. Кроме того, $(0, 0) \in \Omega_t^u$ и $(0, y) \notin \Omega_t^u$ при $y \neq 0$. Отметим, наконец, что $\text{Pr}_2 \Omega_t^u \cap \text{int}(R_+^n \times R_+^1) \neq \emptyset$.

Точечно-множественное отображение, графиком которого является Ω_t^u , обозначим через a_t^u . Обычным образом определим отображения $a_{\tau, t}^u$ ($\tau > t$).

Если (x_t) — траектория модели (\mathfrak{M}, U) и (c_t) — соответствующая траектория потребления, то, как следует непосредственно из определений, последовательность $\chi = (x_t, 1 + \gamma_t(c))$ является траекторией обобщенной технологической модели \mathfrak{M}_U ; с другой стороны, если $\chi = (x_t, \gamma_t)$ — траектория модели \mathfrak{M}_U , то найдется такая последовательность $c = (c_t)$, что (x_t, c_t) — траектория модели (\mathfrak{M}, U) и $\gamma_t - \gamma_0 \leq \gamma_t(c)$.

Поскольку отображения a_t монотонны (возрастают), то, как нетрудно проверить, отображения a_t^u также монотонны. Кроме того, множество $a_t^u(x)$ нормально при всех $x \in \text{Pr}_1 \Omega_t^u$. Это позволяет, используя предложение 11.5, считать, что отображения a_t^u заданы на всем конусе $R_+^n \times R_+^1$ (и нормальны), и применять к модели \mathfrak{M}_U (точнее к моделям $(\mathfrak{M}_U)_T$, $T = 1, 2, \dots$) все результаты, уста-

новленные в § 11 относительно обобщенных моделей, производственные отображения которых заданы на конусе (и нормальны).

Предложение 20.2. Пусть траектория $((\bar{x}_t, \bar{c}_t))$ модели (\mathfrak{M}, U) исходит из внутренней точки конуса $R_+^n \times R_+^1$ и U -оптимальна. Тогда соответствующая ей траектория $\tilde{\chi} = ((\bar{x}_t, 1 + \gamma_t(\bar{c})))$ модели \mathfrak{M}_U является эффективной*) (оптимальной в смысле гл. III) траекторией этой модели.

Доказательство. Предположим, что траектория $\tilde{\chi}$ не эффективна. Тогда найдется натуральное число τ такое, что $\|(\bar{x}_\tau, 1 + \gamma_\tau(\bar{c}))\|_\Omega < 1$, где $\Omega = a_{\tau, 0}^u(\bar{x}_0, 1)$. Последнее означает, что существует элемент $(h, \lambda) \gg 0$, при котором $(\bar{x}_\tau + h, 1 + \gamma_\tau(\bar{c}) + \lambda) \in a_{\tau, 0}^u((\bar{x}_0, 1))$. Пусть $\chi'_\tau = ((x'_t, \lambda'_t))_{t=0}^\tau$ — траектория модели \mathfrak{M}_U , исходящая из точки $(\bar{x}_0, 1)$ и приходящая в момент τ в точку $(x_\tau, \lambda'_\tau) = (\bar{x}_\tau + h, 1 + \gamma_\tau(\bar{c}) + \lambda)$. Так как отображение $a_{\tau, 0}^u$ монотонно возрастает, то $(\bar{x}_{\tau+1}, 1 + \gamma_{\tau+1}(\bar{c}) + \lambda) \in \in a_{\tau, 0}^u(\bar{x}_\tau + h, 1 + \gamma_\tau(\bar{c}) + \lambda)$, и, стало быть, последовательность $\chi' = ((x_t, v_t))$, где

$$(x_t, v_t) = \begin{cases} (x'_t, \lambda'_t), & t = 0, 1, \dots, \tau, \\ (\bar{x}_t, 1 + \gamma_t(\bar{c}) + \lambda), & t = \tau + 1, \tau + 2, \dots, \end{cases}$$

является траекторией.

Для последовательности χ' найдется траектория потребления (c_t) такая, что (x_t, c_t) — траектория модели (\mathfrak{M}, U) и $\gamma_t(\bar{c}) + \lambda \leq \gamma_t(c)$. Это, однако, противоречит U -оптимальности траектории (\bar{x}_t, \bar{c}_t) . Предложение доказано.

Введем теперь следующее определение. Будем говорить, что траектория (\bar{x}_t, \bar{c}_t) модели (\mathfrak{M}, U) допускает характеристику, если найдется последовательность (p_t) , где $p_t \in (R_+^n)^*$, такая, что

$$\begin{aligned} p_{t+1}(\bar{x}_{t+1}) - p_t(\bar{x}_t) + u_{t+1}(\bar{c}_{t+1}) &\geq \\ &\geq p_{t+1}(y - c) - p_t(x) + u_{t+1}(c) \end{aligned} \quad (20.6)$$

*) В гл. III отмечалось, что оптимальные траектории технологической модели (может быть, обобщенной) называются также эффективными. В этой главе будем называть их именно эффективными с тем, чтобы не возникло путаницы между оптимальностью и U -оптимальностью.

(здесь $t = 0, 1, 2, \dots$, $(x, y) \in \Omega_t$, $0 \leq c \leq y$). При этом последовательность (p_i) называется *характеристикой траектории* (\bar{x}_t, \bar{c}_t) .

Заметим, что функционалы (p_i) , фигурирующие в определении характеристики, могут, вообще говоря, равняться нулю. Если $p_{t+1} = 0$, то, как следует из (20.6),

$$p_t(x - \bar{x}_t) \geq u_{t+1}(c) - u_{t+1}(\bar{c}_{t+1})$$

при всех $c \in pa_t(x)$. Полагая $x = \bar{x}_t$, получим, что в рассматриваемом случае

$$u_{t+1}(\bar{c}_{t+1}) = \max_{y \in pa_t(\bar{x}_t)} u_{t+1}(y).$$

Имеет место

Т е о р е м а 20.2. Пусть $((\bar{x}_t, \bar{c}_t))$ — U -оптимальная траектория модели (\mathfrak{M}, U) , исходящая из внутренней точки \bar{x}_0 конуса R_+^n . Тогда выполняется по крайней мере одно из следующих трех условий:

1) траектория (\bar{x}_t, \bar{c}_t) допускает характеристику,
 2) последовательность (\bar{x}_t) является эффективной (оптимальной) траекторией обобщенной технологической модели \mathfrak{M} ,

3) найдется подпоследовательность (\bar{x}_{t_k}) такая, что \bar{x}_{t_k} является граничной сверху точкой множества $a_{k,0}^t(P_{r_1} \Omega_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 20.2 последовательность $\bar{\chi} = ((\bar{x}_t, 1 + \gamma_t(\bar{c})))$ является траекторией модели \mathfrak{M}_U . Предположим сначала, что найдется номер T такой, что при всех $t > T$ точка $(\bar{x}_t, 1 + \gamma_t(\bar{c}))$ не является граничной сверху точкой множества $a_{t,0}^u(P_{r_1} \Omega_0^u)$. В этом случае, согласно теореме 11.4, $\bar{\chi}$ допускает характеристику, как траектория модели \mathfrak{M}_U , т. е. найдется последовательность $(p_t, \mu_t) \in (R_+^n \times R_+^1)^*$ такая, что при всех $t = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} (p_t, \mu_t)((x, \gamma)) - (p_t, \mu_t)((\bar{x}_t, 1 + \gamma_t(\bar{c}))) &\geq \\ &\geq (p_{t+1}, \mu_{t+1})((y, \gamma')) - (p_{t+1}, \mu_{t+1})((\bar{x}_{t+1}, 1 + \gamma_{t+1}(\bar{c}))) \\ &\quad ((x, \gamma), (y, \gamma')) \in \Omega_t^u \\ (p_t, \mu_t)((\bar{x}_t, 1 + \gamma_t(\bar{c}))) &> 0. \end{aligned}$$

Используя определение множества Ω_t^u , перепишем эти неравенства в виде

$$\begin{aligned} p_t(x) + \mu_t \gamma - p_t(x_t) - \mu_t(1 + \gamma_t(\bar{c})) &\geq \\ &\geq p_{t+1}(y - c) + \mu_{t+1}(\gamma + u_{t+1}(c)) - p_{t+1}(x_{t+1}) - \\ - \mu_{t+1}(1 + \gamma_{t+1}(\bar{c})) &((x, y) \in \Omega_t, 0 \leq c \leq y, \gamma \geq 0), \end{aligned} \quad (20.7)$$

$$p_t(x_t) + \mu_t(1 + \gamma_t(\bar{c})) > 0. \quad (20.8)$$

Положив в соотношении (20.7) $x = y = c = 0$, получим, что при всех положительных γ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} (\mu_t - \mu_{t+1})\gamma &\geq p_t(x_t) + \mu_t(1 + \gamma_t(\bar{c})) - p_{t+1}(x_{t+1}) - \\ &- \mu_{t+1}(1 + \gamma_{t+1}(\bar{c})), \end{aligned} \quad (20.9)$$

откуда следует неравенство $\mu_t \geq \mu_{t+1}$. С другой стороны, положив в (20.7) $x = x_t$, $y = x_{t+1} + \bar{c}_{t+1}$, $\gamma = \gamma_t(\bar{c})$, получим, что $\mu_t \leq \mu_{t+1}$. Итак, $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_t = \dots = \mu$. Учитывая эти соотношения, перепишем (20.7) в виде

$$\begin{aligned} p_{t+1}(x_{t+1}) - p_t(x_t) + \mu u_{t+1}(\bar{c}_{t+1}) &\geq p_{t+1}(y - c) - \\ - p_t(x) + \mu u_{t+1}(c) &((x, y) \in \Omega_t). \end{aligned} \quad (20.10)$$

Если $\mu > 0$, то, нормируя, можно считать, что $\mu = 1$. В этом случае формула (20.10) показывает, что траектория (x_t, \bar{c}_t) допускает характеристику. Если же $\mu = 0$, то из (20.10) при $c = 0$ следует, что

$$p_t(x) - p_t(x_t) \geq p_t(y) - p_{t+1}(x_{t+1}) \quad ((x, y) \in \Omega_t).$$

Кроме того, в этом случае, в силу (20.8), $p_t(x_t) \neq 0$ при всех t . Это означает, что последовательность (x_t) допускает характеристику, как траектория модели \mathfrak{M} . Как было показано в п. 5 § 11, отсюда следует эффективность этой траектории.

Таким образом, в рассматриваемой ситуации (существует такое T , что при $t > T$ точка $(x_t, 1 + \gamma_t(\bar{c}))$ не является граничной сверху точкой множества $a_{t,0}^u(\text{Pr}_1 \Omega_0^u)$) теорема доказана. В противном случае найдется подпоследовательность (t_k) такая, что точка $(x_{t_k}, 1 + \gamma_{t_k}(\bar{c}))$ входит в $\partial^+(a_{t_k,0}^u(\text{Pr}_1 \Omega_0^u))$. В этом случае x_{t_k} является граничной сверху точкой множества $a_{t_k,0}(\text{Pr}_1 \Omega_0)$.

Теорема доказана.

Приведем теперь несколько замечаний к теореме 20.2.

З а м е ч а н и е 1. Случаи 2) и 3), фигурирующие в условии теоремы 20.2, неинтересны. Они могут быть реализованы лишь тогда, когда потребление происходит за счет продуктов, не вносящих вклад в производство, появляющихся как побочный продукт в процессе производства. Нетрудно привести простые достаточные условия на модель, гарантирующие невозможность существования таких траекторий. Мы, однако, на этом не останавливаемся. В дальнейшем всегда будем предполагать (иногда не оговаривая этого особо), что рассматриваемые U -оптимальные траектории не порождаются эффективными траекториями модели \mathfrak{M} , т. е. они допускают характеристику.

З а м е ч а н и е 2. При весьма жестких дополнительных предположениях можно доказать (см. Гейл [4]), что для U -оптимальной траектории найдется система цен (p_t) такая, что

$$p_{t+1}(\bar{x}_{t+1} + \bar{c}_{t+1}) - p_t(\bar{x}_t) \geq p_{t+1}(y) - p_t(x) \\ ((x, y) \in \Omega_t), \\ u_t(\bar{c}_t) - p_t(\bar{c}_t) \geq u_t(c) - p_t(c) \quad (c \geq 0).$$

Из написанных неравенств вытекает, в частности, что (p_t) является характеристикой.

З а м е ч а н и е 3. Наличие характеристики является, конечно, только необходимым для U -оптимальности траектории, но недостаточным. Приведем соответствующий пример.

П р и м е р 4. Рассмотрим однопродуктовую модель, описанную в примере 1 данного параграфа. А именно,

$$\Omega_t = \{(x, y) \in R_+^1 \times R_+^1 \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

(f — неотрицательная, строго вогнутая дифференцируемая функция ($f(0) = 0, f'(0) > 1$). Пусть $u_t(c) = \mu^{-t}c$, где число μ удовлетворяет условиям: $0 < \mu < 1$, решение \bar{x} уравнения $f'(x) = \mu$ таково, что $f(\bar{x}) - \bar{x} = \bar{c} > 0$).

Рассмотрим траекторию $((\bar{x}_t, \bar{c}_t))$ этой модели такую, что $\bar{x}_t = \bar{x}, \bar{c}_t = \bar{c}$. Для этой траектории последовательность чисел (μ^{-t}) является характеристической, т. е. удовлетворяет условиям (20.6). Действительно, соотношение (20.6) в данном случае имеет вид

$$\mu^{-t}\bar{x} - \mu^{-(t-1)}\bar{x} + \mu^{-t}\bar{c} \geq \mu^{-t}(f(x) - c) - \mu^{-(t-1)}x + \mu^{-t}c$$

для всех $x \geq 0$ и $0 \leq c \leq f(x)$. Умножив это неравенство на μ^t и приведя подобные члены, получим $f(\bar{x}) - \mu\bar{x} \geq f(x) - \mu x$ для всех $x \geq 0$. Это неравенство вытекает из того, что $f'(\bar{x}) = \mu$.

Таким образом, траектория $((\bar{x}_t, \bar{c}_t))$ модели (\mathfrak{M}, U) характеризуется последовательностью (μ^{-t}) . Однако U -оптимальных траекторий в этой модели не существует, так как здесь имеет место ситуация, описанная в примере 2 (поскольку $\mu < 1$).

4. Необходимые и достаточные условия U -оптимальности. Проблема отыскания необходимых и достаточных условий для U -оптимальности траекторий в общей модели (\mathfrak{M}, U) остается открытой.

Здесь устанавливаются необходимые и достаточные условия оптимальности при дополнительных, довольно жестких условиях.

Предварительно отметим следующий факт. Рассмотрим задачу нахождения U -оптимальной траектории на конечном временном интервале.

Найти максимум суммы $\sum_{t=0}^T u_t(c_t)$ при условиях:

$$(x_t, x_{t+1} + c_{t+1}) \in \Omega_t \quad (t = 0, \dots, T-1), \quad x_0 = \bar{x}_0.$$

Это задача выпуклого программирования, и потому для нее можно воспользоваться хорошо известными теоремами о необходимых и достаточных условиях экстремума. В данном случае теорема о необходимых и достаточных условиях формулируется так:

Для того чтобы траектория $(\bar{x}_t, \bar{c}_t)_{t=0}^T$ была оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы нашлась последовательность $(p_t)_{t=0}^T$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $p_t \geq 0$ ($t = 0, \dots, T$),
- 2) $p_{t+1}(\bar{x}_{t+1}) - p_t(\bar{x}_t) + u_{t+1}(\bar{c}_{t+1}) \geq p_{t+1}(y - c) - p_t(x) + u_{t+1}(c)$ для всех $(x, y) \in \Omega_t$, $0 \leq c \leq y$,
- 3) $p_T(\bar{x}_T) = 0$.

Эти условия вытекают из теоремы 11.3. Из приведенной формулировки видно, что условия 1), 2) такие же, как в теореме 20.2, а условие 3) является новым.

Спрашивается, нельзя ли поэтому перенести данную теорему на случай бесконечных траекторий. Оказывается, что это возможно только при ряде дополнительных условий.

Т е о р е м а 20.3. Пусть для траектории (\bar{x}_t, \bar{c}_t) модели (\mathfrak{M}, U) существует характеристика $(p_t)_{t=0}^{\infty}$ такая, что $\lim p_t(\bar{x}_t) = 0$. Тогда траектория (\bar{x}_t, \bar{c}_t) является U -оптимальной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (20.6) непосредственно вытекает соотношение

$$p_{t+1}(\bar{x}_{t+1}) - p_0(\bar{x}_0) + \gamma_{t+1}(\bar{c}) \geq p_{t+1}(x_{t+1}) - p_0(x_0) + \gamma_{t+1}(c)$$

для любой траектории (x_t, c_t) , исходящей из той же точки \bar{x}_0 . А из этого соотношения в свою очередь следует, что

$$p_t(\bar{x}_t) + \gamma_t(\bar{c}) \geq p_t(x_t) + \gamma_t(c) \quad (20.11)$$

для всех t и любой траектории (x_t, c_t) , у которой $x_0 = \bar{x}_0$. По условию теоремы $p_t(x_t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, кроме того, $p_t(x_t) \geq 0$ для всех t , поскольку $p_t \geq 0$ и $x_t \geq 0$. Учитывая эти факты и переходя к пределу в неравенстве (20.11), получим

$$\lim (\gamma_t(\bar{c}) - \gamma_t(c)) \geq 0,$$

а это и означает, что траектория (\bar{x}_t, \bar{c}_t) является U -оптимальной.

Теорема доказана.

Условия теоремы 20.3 являются только достаточными для U -оптимальности, но далеко не необходимыми в общем случае. Приведем соответствующий пример.

Пример 5. Рассмотрим снова однопродуктовую модель из примера 1, т. е. $\Omega_t = \{(x, y) \in R_+^1 \times R_+^1 \mid 0 \leq y \leq f(x), x \geq 0\}$, f — строго вогнутая дифференцируемая функция. Пусть $U = (u_t)$ такова, что $u_t(c) = c$ для всех t . Нетрудно проверить U -оптимальность траектории $((\bar{x}_t, \bar{c}_t))$, где $\bar{x}_t = \bar{x}$, $\bar{c}_t = \bar{c}$; \bar{x} является решением уравнения*) $f'(x) = 1$, $\bar{c} = f(\bar{x}) - \bar{x}$. При этом последовательность $(p_t)_{t=0}^\infty$, где $p_t = 1$, является характеристической для траектории (\bar{x}_t, \bar{c}_t) . Однако $p_t(x_t) = \bar{x}$ для всех t . Следовательно, данный пример показывает, что условие $\lim p_t(x_t) = 0$ совместно с (20.6) является лишь достаточным для U -оптимальности, но не необходимым.

§ 21. МАГИСТРАЛИ

1. Введение. В § 6 изучались состояния неймановского равновесия**) для суперлинейного отображения a . Состояние равновесия $((\bar{x}, \bar{y}), p, \alpha)$, как уже отмечалось в гл. IV, порождает (в случае нормального отображения a) эффективную траекторию $(\alpha^t \bar{x})_{t=0}^\infty$. Эта траектория является стационарной в том смысле, что состояние в последующий момент отличается от состояния в предыдущий момент только масштабом, но не соотношениями между компонентами. В настоящем параграфе выясняется вопрос о существовании и нахождении стационарных U -оптимальных траекторий для модели (\mathfrak{M}, U) , у которой $\Omega_t = \Omega$ для всех t и $u_t = u/\mu^t$, где u — вогнутая непре-

*) Предполагается, что $c > 0$.

**) Не путать с состоянием равновесия в смысле Нэша игры n лиц и модели экономического равновесия, определенного в §§ 17, 18.

ривная функция, $\sup_{c \in R_+^n} u(c) = \infty$, μ — положительное

число. Эту модель обозначаем в дальнейшем через (Ω, u) .

Вопрос о вычислении U -оптимальных траекторий, выходящих из произвольного состояния, даже для весьма простых моделей, является трудным и обнадеживающих результатов здесь почти нет. Что же касается вычисления стационарных U -оптимальных траекторий модели (Ω, u) , то здесь все достаточно просто, поскольку эти траектории находятся из решения специальным образом построенных задач выпуклого программирования.

2. Магистрали для случая $\mu = 1$. Сформулируем упомянутую задачу выпуклого программирования.

Задача 21.1. Найти $\max u(c)$ при условиях:

$$y - c = x, \quad 0 \leq c \leq y, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Наложим дополнительное ограничение на множество Ω , которое предполагается выполненным на протяжении всего параграфа. Оно заключается в следующем:

Множество $C = \{c \in R_+^n \mid c = y - x, (x, y) \in \Omega\}$ непусто, компактно и телесно. (Компактность C можно гарантировать, например, в том случае, когда Ω ограничено.)

Если это ограничение выполнено, то решение задачи 21.1 по теореме Вейерштрасса существует. Обозначим его через $(\bar{x}, \bar{y}), \bar{c}$.

Задача 21.1 в стандартной формулировке в терминах пересечения конуса и оси выглядит следующим образом.

Задача 21.1'. Найти $\max \gamma$ при условии $(b, \gamma) \in Z$, где Z есть замыкание множества

$$\{z \in R^{n+2} \mid z = \lambda(-1, -x + y - c, \gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq u(c), \\ (x, y) \in \Omega, \quad 0 \leq c \leq y, \quad \lambda \geq 0\}, \quad b = (-1, 0, \dots, 0).$$

Так как Z телесно, то к задаче 21.1 применима теорема Куна — Таккера. Согласно этой теореме, для того чтобы $(\bar{x}, \bar{y}), \bar{c}$ было решением задачи, необходимо и достаточно существование функционала $\pi \in (R_+^{n+2})^*$, удовлетворяющего условиям:

$$\pi(z) \leq 0 \quad \text{для всех } z \in Z, \quad (21.1)$$

$$\pi(\bar{z}) = 0, \quad \text{где } \bar{z} = (-1, 0, \dots, 0, u(\bar{c})), \quad (21.2)$$

$$\pi^{n+2} = 1. \quad (21.3)$$

Т е о р е м а 21.1. *Стационарная траектория (\bar{x}_t, \bar{c}_t) , где $\bar{x}_t = \bar{x}$, $\bar{c}_t = \bar{c}$, является U -оптимальной в модели (Ω, u) , у которой $\mu = 1$ и u — строго вогнутая функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью только что сформулированной теоремы о характеристике решения задачи 21.1' построим характеристическую последовательность цен (p_t) . А именно, положим $p_t = p$ для всех t , где $p = (p^1, \dots, p^{n+1})$, а p^1, \dots, p^{n+1} — соответствующие координаты функционала λ из теоремы о характеристике. Тогда из соотношений (21.1) — (21.3) вытекает $p_{t+1}(x) - p_t(x) + u(\bar{c}) \geq p_{t+1}(y - c) - p_t(x) + u(c)$ для всех $(x, y) \in \Omega$, $0 \leq c \leq y$ и всех t . Это означает, что последовательность (p_t) является характеристической для траектории (\bar{x}_t, \bar{c}_t) . В частности, выполнено неравенство

$$\gamma_t(\bar{c}) + p_t(\bar{x}_t) \geq \gamma_t(c) + p_t(x_t) \quad (21.4)$$

для любого t и любой траектории (x_t, c_t) , выходящей из того же начального состояния, что и (\bar{x}_t, \bar{c}_t) . Рассмотрим какую-нибудь траекторию (x_t, c_t) , $x_0 = \bar{x}$, для которой $p_{t+1}(x_{t+1}) + u(\bar{c}_{t+1}) - p_t(\bar{x}_t) - p_{t+1}(x_{t+1}) - u(c_{t+1}) + p_t(x_t) \geq \varepsilon > 0$ на последовательности (t_k) .

Для этой траектории (x_t, c_t) , начиная с некоторого момента t' , будет иметь место неравенство

$$\gamma_t(\bar{c}) + p_t(\bar{x}_t) - \gamma_t(c) - p_t(x_t) > p_t(\bar{x}_t) \quad (t \geq t').$$

Это соотношение вместе с (21.4) дает неравенство

$$\gamma_t(\bar{c}) > \gamma_t(c) \quad \text{для } t \geq t',$$

следовательно, траектория (x_t, c_t) не может быть U -оптимальной.

Поэтому рассмотрим теперь траекторию (x_t, c_t) , $x_0 = \bar{x}$, для которой выполнено соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (p_{t+1}(x_{t+1} - x_{t+1}) + u(\bar{c}_{t+1}) - u(c_{t+1}) + p_t(x_t - \bar{x}_t)) = 0. \quad (21.5)$$

В силу строгой вогнутости функции u из этого соотношения вытекает $c_t \rightarrow \bar{c}$ при $t \rightarrow \infty$ и, следовательно, $x_t \rightarrow \bar{x}$.

Сопоставляя этот факт с соотношением (21.4) для траектории (x_t, c_t) , получаем, что (\bar{x}_t, \bar{c}_t) есть U -оптимальная траектория, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е к т е о р е м е 21.1. Для U -оптимальности траектории (\bar{x}_t, \bar{c}_t) существенно, чтобы из соотношения (21.5) следовала сходимость $(x_t, c_t) \rightarrow (\bar{x}, \bar{c})$. Эту сходимость можно гарантировать не только при условии, что u строго вогнута, но, например, при условии, что множество Ω строго выпукло.

При отсутствии же строгой выпуклости или, точнее, при существовании нескольких траекторий, соответствующих характеристическим ценам (p_t) , стационарная траектория (\bar{x}, \bar{c}) может не быть U -оптимальной. В подтверждение этого приведем пример.

П р и м е р. Рассмотрим модель (Ω, u) , где множество Ω имеет следующий вид:

$$\Omega = \{(x, y) \in R_+^2 \times R_+^2 \mid y^1 \leq x^2, y^2 \leq 2x^1, x^1 + x^2 \leq 2\},$$

а функция u определена формулой

$$u(c) = (1 + \varepsilon) c^1 + c^2 \quad (\text{где } 0 < \varepsilon < 1/2).$$

Для формулировки задачи 21.1 надо описать множество $C = \{c \in R_+^2 \mid c = y - x, (x, y) \in \Omega\}$. Пусть $x \in \text{Pr}_1 \Omega$, т. е. $x^1 + x^2 \leq 2$ и $y \in a(x)$, где a — отображение, график которого совпадает с Ω . Положим $c = y - x$. Тогда $c^1 \leq x^2 - x^1, c^2 \leq 2x^1 - x^2$. Если вектор x таков, что хотя бы для одного $y \in a(x)$ элемент $c = y - x$ входит в множество C , то x удовлетворяет системе неравенств

$$x^2 - x^1 \geq 0, 2x^1 - x^2 \geq 0, x^1 + x^2 \leq 2,$$

решением которой является треугольник T с вершинами в точках $(0, 0), (1, 1), (2/3, 4/3)$. Наоборот, для любого $x \in T$ найдется $y \in a(x)$, при котором $c = y - x \geq 0$. Отсюда следует, что множество C имеет вид

$$C = \{c \in R_+^2 \mid c^1 \leq x^2 - x^1, c^2 \leq 2x^1 - x^2, x \in T\}.$$

Задача 21.1 заключается в максимизации линейной функции $u(c) = (1 + \varepsilon) c^1 + c^2$ на множестве C . Используя вид множества C , легко проверить, что элемент \bar{c} является решением этой задачи в том и только том случае, когда $\bar{c} = \bar{y} - \bar{x}$, где $\bar{x} \in T$, причем на элементе \bar{x} достигается максимума на T линейный функционал $f(x) = (1 + \varepsilon)(x^2 - x^1) + (2x^1 - x^2)$, $\bar{y} = (\bar{x}^2, 2\bar{x}^1)$. Учитывая, что $\varepsilon < 1/2$, нетрудно показать, что f достигает максимума на T в единственной точке $(1, 1)$. Итак, $\bar{x} = (1, 1), \bar{y} = (1, 2), \bar{c} = (0, 1)$.

Таким образом, стационарная траектория, полученная из решения задачи 21.1, имеет вид $\bar{x} = (1, 1), \bar{c} = (0, 1)$ и порождает последовательность $(\gamma_t(\bar{c})) = (t)$.

Рассмотрим траекторию (x_t, c_t) данной модели, выходящую из того же самого начального состояния, что и (\bar{x}, \bar{c}) , т. е. $x_0 = \bar{x}$, где

$$(x_t)_{t=0}^\infty = ((1, 1), (0, 2), (2, 0), (0, 2), (2, 0), \dots),$$

$$(c_t)_{t=1}^\infty = ((1, 0), (0, 0), (0, 2), (0, 0), (0, 2), \dots).$$

Следовательно, $\gamma_t(c) = 1 + \varepsilon + \left[\frac{t-1}{2} \right] \cdot 2$, где $\left[\frac{t-1}{2} \right]$ — целая

часть числа $\frac{t-1}{2}$. Таким образом, для нечетных t имеем $\gamma_t(c) = t + \varepsilon$, т. е. $\gamma_t(c) - \gamma_t(\bar{c}) = \varepsilon$, и, стало быть, стационарная траектория (\bar{x}, \bar{c}) не является U -оптимальной.

С другой стороны, траектория (x_t, c_t) также не U -оптимальна, поскольку $\gamma_t(\bar{c}) > \gamma_t(c)$ при четных t . Нетрудно убедиться в том, что не существует других траекторий данной модели, которые мажорируют рассмотренные траектории (x_t, c_t) и (\bar{x}, \bar{c}) . Следовательно, в данном примере U -оптимальных траекторий вообще не существует.

3. Магистралы для случая $\mu > 1$. Начнем с формулировки задачи выпуклого программирования, решение которой при подходящем образом выбранном векторе ограничений позволит сконструировать искомую магистраль. Основная проблема здесь состоит в том, чтобы показать, что такой вектор ограничений найдется. Решение этой проблемы осуществляется с помощью привлечения теоремы Какутани о неподвижной точке.

Задача 21.2. Найти $\max \gamma$ при условии $(b, \gamma) \in Z$, где Z есть замыкание множества

$$\left\{ \tilde{z} \in R^{n+2} \mid \tilde{z} = \lambda \left(-1, \frac{y-c}{\mu} - x, \gamma \right), (x, y) \in \Omega, \right. \\ \left. 0 \leq \gamma \leq u(c), 0 \leq c \leq y, \lambda \geq 0 \right\}, \\ b = \left(-1, \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) z \right).$$

Эта задача эквивалентна следующей.

Задача 21.2'. Найти

$$\max_{c \in C_z} u(c),$$

где $C_z = \{c \in R_+^n \mid c = y - \mu x + (\mu - 1)z, (x, y) \in \Omega, 0 \leq c \leq y\}$.

В дальнейшем предполагаем, что вектор z принадлежит множеству $X = \{x \in R_+^n \mid (x, y) \in \Omega, y - x \geq 0\}$. Если $z \in X$, то, как нетрудно проверить, задача 21.2', а стало быть, и задача 21.2 имеют решение.

Положим

$$\lambda_0 = \sup \{ \lambda > 0 \mid \lambda x \leq y, (x, y) \in \Omega \}.$$

Поскольку, по предположению, существует $(x, y) \in \Omega$ такой, что $y \geq x$, то $\lambda_0 > 1$.

Предполагаем в дальнейшем, что $\mu < \lambda_0$. Пусть процесс $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ таков, что $\mu\bar{x} \ll \bar{y}$. Положим $\bar{c} = \bar{y} - \mu\bar{x}$. Вектор $\bar{c} \in C_z$ при любом $z \in X$.

Обозначим через δ положительное число, обладающее тем свойством, что из неравенства $\sum_{i=1}^n c^i < \delta$ следует неравенство $c \leq \bar{c}$ (здесь $c \geq 0$). Такое δ найдется, ибо $\bar{c} \gg 0$. Так как u — возрастающая функция, то решение задачи 21.2' при любом z достигается на векторе $\bar{c}(z)$, который не меньше, чем \bar{c} . Стало быть, при любом z выполняется

$\bar{c}(z) \in \{c \in R_+^n \mid \sum_{i=1}^n c^i \geq \delta\}$. Пусть элементы \bar{x} и \bar{y} таковы, что $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$, $\bar{c}(z) \leq \bar{y}$, $\bar{c}(z) = \bar{y} - \mu\bar{x} + (\mu - 1)z$.

Справедливо неравенство $\sum_{i=1}^n \bar{y}^i > \delta$. Отметим теперь, что по данному δ найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого процесса $(x, y) \in \Omega$, удовлетворяющего условию $\sum y^i > \delta$, выполняется неравенство $\sum x^i > \varepsilon$. (Это легко следует из замкнутости Ω и условия $(0, y) \notin \Omega$ при $y \neq 0$.) При этом можно считать, что $\varepsilon < \delta$.

Положим $X(\varepsilon) = \{x \in X \mid \sum_{i=1}^n x^i \geq \varepsilon\}$. Мы показали, что при любом $z \in X$ (и, в частности, $z \in X(\varepsilon)$) вектор \bar{x} удовлетворяет неравенству $\sum \bar{x}^i > \varepsilon$. Нам будет удобно несколько видоизменить задачу с тем, чтобы $\bar{x} \in X(\varepsilon)$.

Для этого наряду с задачей 21.2 рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования, отличающуюся от 21.2 только наличием дополнительного условия $x \leq y$ для $(x, y) \in \Omega$.

Задача 21.3. Найти $\max \gamma$ при условии $(b, \gamma) \in \bar{Z}$, где \bar{Z} есть замыкание множества

$$\left\{ \bar{z} \in R^{n+2} \mid \bar{z} = \lambda \left(-1, \frac{y-c}{\mu} - x, \gamma \right), (x, y) \in \Omega, \right. \\ \left. 0 \leq \gamma \leq u(c), 0 \leq c \leq y, x \leq y, \lambda \geq 0 \right\},$$

$$b = \left(-1, \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) z \right).$$

Эта задача эквивалентна следующей.

Задача 21.3'. Найти

$$\max_{c \in C'_z} u(c),$$

где $C'_z = \{c \in R_+^n \mid c = y - \mu x + (\mu - 1)z, (x, y) \in \Omega, (\mu - 1)\mu^{-1}z \leq x \leq y\}$. (Условия $c \leq y$ и $(\mu - 1)\mu^{-1}z \leq x$ эквивалентны.)

Решение задачи 21.3 при $z \in X$ существует по тем же соображениям, что и в случае задачи 21.2. Это решение определяется векторами (x, y) и c . Обозначим множество векторов x , входящих в решение задачи 21.3 при данном z , через $\Gamma(z)$. Поскольку среди ограничений задачи 21.3 присутствует и неравенство $x \leq y$ ($(x, y) \in \Omega$), то $\Gamma(z) \subset X$ при любом $z \in X$. Более того, поскольку векторы (\bar{x}, \bar{y}) и \bar{c} таковы, что $\bar{x} \leq \mu \bar{x} \leq \bar{y}$, то, рассуждая, как и выше, получим, что $\Gamma(z) \subset X(\varepsilon)$ для $z \in X(\varepsilon)$.

Таким образом, определено точечно-множественное отображение Γ , переводящее множество $X(\varepsilon)$ в себя.

Лемма 21.1. *Отображение Γ обладает следующими свойствами:*

- 1) $\Gamma(z)$ непусто и выпукло для любого $z \in X(\varepsilon)$,
- 2) Γ полунепрерывно сверху на множестве $X(\varepsilon)$.

Доказательство. Положим

$$\bar{C}_z = \{c \geq (1 - \mu)z \mid c = y - \mu x, (x, y) \in \Omega, (\mu - 1)\mu^{-1}z \leq x \leq y\}.$$

Множество \bar{C}_z выпукло, компактно, непусто. Для данного $z \in X(\varepsilon)$ задачу 21.3' можно переписать в следующем виде.

Найти $\max u(c)$ при условии, что $c \in \bar{C}_z + (\mu - 1)z$.

Пусть $C(z) = \{c \in \bar{C}_z + (\mu - 1)z \mid u(\bar{c}) = \max_{c \in \bar{C}_z + (\mu - 1)z} u(c)\}$.

Так как функция u вогнута, а множество $\bar{C}_z + (\mu - 1)z$ является выпуклым компактом, то множество $C(z)$ выпукло и непусто. Кроме того, точечно-множественное отображение $z \rightarrow C(z)$ полунепрерывно сверху.

Заметим теперь, что для $z \in X(\varepsilon)$

$$\Gamma(z) = \left\{ x \in R_+^n \mid x = \frac{y - c}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) z, (x, y) \in \Omega, 0 \leq c \leq y, x \leq y, c \in C(z) \right\}.$$

Утверждение леммы следует из написанной формулы.

Теорема 21.2. Пусть модель (Ω, u) такова, что $1 < \mu < \lambda_0$ и $u(c) = 0$, если $c^i = 0$ хотя бы для одного i . Тогда магистраль существует.

Доказательство. (а) Согласно лемме 21.1 точечно-множественное отображение $\Gamma: x \rightarrow \Gamma(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Какутани о неподвижной точке. Обозначим неподвижную точку через \bar{x} , т. е. $\bar{x} \in \Gamma(\bar{x})$. Решение задачи 21.3 при векторе $b = (-1, (1/\mu - 1)\bar{x})$ обозначим через (\bar{x}, \bar{y}) , \bar{c} . Для \bar{c} выполнено неравенство $\bar{c} \gg 0$, ибо в противном случае, согласно условиям теоремы, относительно функции u справедливо равенство $u(\bar{c}) = 0$. С другой стороны, поскольку существует вектор $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Omega$ такой, что $\lambda_0 \tilde{x} \leq \tilde{y}$ и $\lambda_0 > \mu$, то $\frac{\tilde{y} - \tilde{c}}{\mu} - \tilde{x} \geq \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)\tilde{x}$ и $u(\tilde{c}) > 0$, что противоречит оптимальности значения функции u в точке \bar{c} .

Покажем, что решение (\bar{x}, \bar{y}) , \bar{c} задачи 21.3 при ограничениях $(-1, \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)\bar{x})$ является решением также и задачи 21.2 при тех же самых ограничениях. Обозначим функционал, соответствующий, согласно теореме о характеристике задачи выпуклого программирования, решению (\bar{x}, \bar{y}) , \bar{c} , через $\bar{p} = (v, p, 1) \in (R_+^{n+2})^*$. Имеем $\bar{p}(z) \leq 0$ для всех $z \in Z$ и $\bar{p}((-1, \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)\bar{x}, u(\bar{c})) = 0$. Следует установить, что $\bar{p}(z) \leq 0$ для всех $z \in Z$, а не только для $z \in \tilde{Z}$. Для этого достаточно показать, что

$$p\left(\frac{\bar{y} - \bar{c}}{\mu} - \bar{x}\right) + u(\bar{c}) \geq p\left(\frac{y - c}{\mu} - x\right) + u(c) \quad (21.6)$$

для всех $(x, y) \in \Omega$. Из соотношения $\bar{p}(z) \leq 0$ при $z \in \tilde{Z}$ следует выполнение неравенства (21.6) только при дополнительном условии, что $x \leq y$. Если бы соотношение (21.6) не выполнялось для всех $(x, y) \in \Omega$, это означало бы, что для любого $\varepsilon > 0$ нашелся бы вектор $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Omega$, для которого $\|(\hat{x}, \hat{y}) - (\bar{x}, \bar{y})\| \leq \varepsilon$ и

$$p\left(\frac{\bar{y} - \bar{c}}{\mu} - \bar{x}\right) + u(\bar{c}) < p\left(\frac{\hat{y} - \hat{c}}{\mu} - \hat{x}\right) + u(\hat{c}). \quad (21.7)$$

* Напомним, что Z и \tilde{Z} — конусы, фигурирующие в задачах 21.2 и 21.3 соответственно.

Но поскольку при достаточно малом ε неравенство $\hat{x} \leq \hat{y}$ не нарушается, так как $\bar{x} \ll \bar{y}$ ($\bar{c} \gg 0$), то неравенство (21.7) не может иметь место. Таким образом, мы получили, что $\bar{p}(z) \leq 0$ для всех $z \in Z$. Последнее означает по теореме о характеристике задачи выпуклого программирования, что (\bar{x}, \bar{y}) , \bar{c} является решением задачи 21.2.

(б) Построим с помощью этого решения (\bar{x}, \bar{y}) , \bar{c} траекторию (\bar{x}_t, \bar{c}_t) модели (Ω, u) , положив $\bar{x}_t = \bar{x}$, $\bar{c}_t = \bar{c}$ для всех t . Последовательность (\bar{x}_t, \bar{c}_t) действительно является траекторией, так как из включения $\bar{x} \in \Gamma(\bar{x})$ вытекает $\frac{\bar{y} - \bar{c}}{\mu} - \bar{x} = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \bar{x}$ и, следовательно, $\bar{y} - \bar{c} = \bar{x}$.

Покажем теперь, что стационарная траектория (\bar{x}_t, \bar{c}_t) U -оптимальна. С помощью функционала \bar{p} построим последовательность (p_t) характеристических цен для траектории (\bar{x}_t, \bar{c}_t) . А именно, положим $p_t = \frac{p}{\mu^t}$ для всех t . Эта последовательность действительно характеристическая, т. е. выполнено соотношение (20.6). Неравенство $p_t (\bar{y} - \bar{c}) + u(\bar{c})/\mu^t - p_{t-1}(\bar{x}) \geq p_t (y - c) + u(c)/\mu^t - p_{t-1}(x)$ для всех t и всех $(x, y) \in \Omega$, $0 \leq c \leq y$ непосредственно следует из соотношения $p(z) \leq 0$ для всех $z \in Z$. Далее, поскольку $\mu > 1$, то $\lim p_t(\bar{x}_t) = 0$. Следовательно, по теореме 20.3 траектория (\bar{x}_t, \bar{c}_t) является U -оптимальной.

Теорема доказана.

§ 22. ЭКОНОМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ НА БЕСКОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ И U -ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

1. Введение. В этом параграфе рассматривается модель конкурентного экономического равновесия на бесконечном временном интервале. Вводится понятие равновесия для данной модели и доказывается соответствующая теорема существования.

В заключение доказывается теорема эквивалентности между некоторыми состояниями равновесия и U -оптимальными траекториями, которая аналогична теореме 19.1. Роль модели Эрроу — Дебре здесь играет модель равновесия на бесконечном временном интервале, а роль соответствующей задачи выпуклого программирования — задача о нахождении U -оптимальной траектории. Таким

образом, результаты настоящего параграфа можно рассматривать как распространение результатов §§ 18, 19 на случай бесконечного временного интервала.

Существенное отличие от случая с конечным временным интервалом состоит в том, что в общей ситуации состояние равновесия порождает только эффективную траекторию, но не обязательно U -оптимальную. Мы указываем лишь некоторые достаточные условия для того, чтобы состояние равновесия порождало U -оптимальную траекторию. Формулировка необходимых и достаточных условий является нерешенной проблемой.

2. Модель M_∞ . В этом пункте обобщается модель конкурентного равновесия Эрроу — Дебре, описанная в § 18, на случай бесконечного временного интервала, причем при построении этой модели используется информация, задающая модель (\mathfrak{M}, U) (см. § 20). В дальнейшем будем обозначать описываемую модель через M_∞ . Содержательно модель M_∞ можно описать так: имеется один производитель, множество производственных возможностей которого есть $C(x_0)$, где $C(x_0)$ определено в § 20 (x_0 — некоторая фиксированная точка из R_+^n). Потребителей в модели счетное множество (каждому единичному временному интервалу отвечает свой потребитель). Как и в модели Эрроу — Дебре, производитель старается максимизировать прибыль, а потребитель с номером t стремится к максимуму функции полезности u_t . Кроме модели (\mathfrak{M}, U) задана также последовательность $\theta = (\theta_t)$ распределения прибылей, где θ_t указывает долю прибыли производителя, которая поступает в распоряжение потребителя t (здесь $\theta_t \geq 0$, $\sum \theta_t = 1$).

Состоянием равновесия модели M_∞ называется последовательность $(\bar{x}_t, \bar{c}_t, \bar{p}_t)_{t=0}^\infty$ (где $\bar{x}_t \in R_+^n$, $\bar{c}_t \in R_+^n$, $\bar{p}_t \in (R_+^n)^*$), удовлетворяющая условиям (для всех t):

$$(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1} + \bar{c}_{t+1}) \in \Omega_t, \quad (22.1)$$

$$\bar{p}_{t+1}(\bar{y}_{t+1}) - \bar{p}_t(\bar{x}_t) = \max_{(x, y) \in \Omega_t} (\bar{p}_{t+1}(y) - \bar{p}_t(x)), \quad (22.2)$$

где $\bar{y}_{t+1} = \bar{x}_{t+1} + \bar{c}_{t+1}$,

$$u_t(\bar{c}_t) = \max_{p_t(c) \leq \theta_t p_t(\bar{y}_t)} u_t(c). \quad (22.3)$$

Здесь условие (22.2) говорит о том, что производитель в период t максимизирует прибыль на множестве производственных возможностей в этот период времени; условие (22.3) показывает, что в состоянии равновесия потребитель t получает максимальную полезность при ограничении, что его доход равен $\theta_t p_t(\bar{y}_t)$, где $p_t(\bar{y}_t)$ — общая сумма денег, которой располагает производитель в момент времени t .

3. Существование состояния равновесия.

Т е о р е м а 22.1. Пусть модель M_∞ такова, что Ω_t является компактом для всех t . Тогда эта модель обладает состоянием равновесия.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем момент времени T и некоторый ненулевой функционал $\pi \in (R^n)^*$. Построим в пространстве «продуктов» R^{nT} модель конкурентного равновесия Эрроу — Дебре, которую будем обозначать через $M(\pi, T)$. Производитель в модели $M(\pi, T)$ один, его множество производственных возможностей

$$X = \{z \in R^{nT} \mid z = (y_1 - x_0, y_2 - x_1, \dots, y_T - x_{T-1}), \\ (x_t, y_{t+1}) \in \Omega_t, t = 0, \dots, T-1\}.$$

Число потребителей в модели равно $T + 1$, функция полезности v_t потребителя с номером t определяется так: $v_t(z) = u_t(z_t)$ для $t = 0, \dots, T-1$, где z_t есть проекция вектора $z \in R^{nT}$ на координаты с номерами $nt + 1, \dots, n(t+1)$. Функция полезности v_T потребителя с номером T есть $v_T(z) = \pi(z_T)$. Наконец, матрица (здесь вектор, так как производитель один) распределения прибылей такова:

$$\theta(T) = (\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_{T+1}),$$

где $\theta'_1 = \theta_1$, $\theta'_t = \theta_t \cdot \prod_{\tau=1}^{t-1} (1 - \theta_\tau)$, $t = 2, \dots, T$; $\theta'_{T+1} = 1 - \sum_{t=1}^T \theta'_t$. Таким образом, сумма компонент вектора $\theta(T)$ равна единице.

Построенная модель Эрроу — Дебре $M(\pi, T)$ удовлетворяет условиям теоремы 18.1, и следовательно, состояние равновесия в ней существует. Обозначим состояние

равновесия через

$$z = (z(\pi, T, t))_{t=0}^T = (x(\pi, T, t), c(\pi, T, t), p(\pi, T, t))_{t=0}^T.$$

Согласно определению оно удовлетворяет соотношениям:

$$(x_t, x_{t+1} + c_{t+1}) \in \Omega_t, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad x_0 = \bar{x}_0, \quad (22.4)$$

$$\Pi = \sum_{t=1}^T p_t(c_t) + p_T(x_T) = \max \sum_{t=1}^T p_t(y_t) - \sum_{t=0}^{T-1} p_t(x_t), \quad (22.5)$$

где максимум берется по всем последовательностям $(x_0, x_1, \dots, x_{T-1}, y_1, \dots, y_T)$ таким, что $x_0 = \bar{x}_0$ и $(x_t, y_{t+1}) \in \Omega_t, t = 0, \dots, T-1,$

$$u_t(c_t) = \max_{c \geq 0, p_t(c) \leq \theta_t \cdot \Pi} u_t(c), \quad (22.6)$$

$$\pi(x_T) = \max_{v \geq 0, p_T(v) \leq \Pi \left(1 - \sum_{t=1}^T \theta_t\right)} \pi(y). \quad (22.7)$$

Введем в рассмотрение множество E_T , состоящее из всех состояний равновесия z моделей $M(\pi, T)$, когда T фиксировано, а π пробегает множество $\{\pi \in (R_+^n)^* \mid \sum \pi^i = 1\}$. Кроме того, дополнительно предполагается, что вектор цен $(p(\pi, T, t))_{t=1}^T$, входящий в состояние равновесия z , нормирован с помощью соотношения $\sum_i p^i(\pi, T, 1) = 1$.

Дело в том, что в состоянии равновесия, по определению, вектор цен определен с точностью до постоянного положительного множителя. Кроме того, по теореме 18.1 он неотрицателен и не равен нулю. Нормировка $\sum_i p^i(\pi, T, 1) = 1$ правомерна, поскольку вектор $p(\pi, T, 1)$ также не равен нулю. Действительно, в противном случае, в силу свойства ненасыщаемости функции полезности u_t и выполнения соотношения (22.6), было бы $c^i(\pi, T, 1) = \infty$ для некоторого i , что невозможно.

Покажем, что множество E_T замкнуто. Для этого рассмотрим, как обычно, сходящуюся последовательность $(z(k)), z(k) \in E_T$ для всех k , предел которой обозначим

через \hat{z} . Поскольку множества Ω_t замкнуты, то соотношение (22.4) выполнено для предела \hat{z} , коль скоро оно выполнено для всех $z(k)$. Установим для \hat{z} выполнение соотношений (22.5) — (22.7). Для этого введем в рассмотрение три серии точно-множественных отображений, определенных на E_T . Отображения, относящиеся к одной серии, соответствуют производителю и потребителям модели $M(\pi, T)$, т. е. число таких отображений равно $T + 2$.

С е р и я I. Отображения $\Gamma_s^I (s = 1, \dots, T + 2)$ ставят в соответствие каждому $z \in E_T$ множество, на котором максимизируется соответствующая целевая функция производителя или потребителей, а именно,

$$\Gamma_{T+2}^I(z) = \{v \in R^{nT} \mid v = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_{T-1} - x_{T-1}, y_T), (x_t, y_{t+1}) \in \Omega_t, t = 0, \dots, T - 1, x_0 = \bar{x}_0\},$$

где $T + 2$ — номер производителя,

$\Gamma_s^I(z) = \{c \in R_+^n \mid p_s(c) \leq \theta_s \Pi(z)\}$ для $s = 1, \dots, T$ (здесь $\Pi(z)$ — прибыль производителя в состоянии z , т. е. $\Pi(z) = \sum_{t=1}^T p_t(c_t) + p_T(x_T)$, где p_t, c_t, x_T определены из состояния z ,

$$\Gamma_{T+1}^I(z) = \left\{ x \in R_+^n \mid p_T(x) \leq \Pi(z) \left(1 - \sum_{t=1}^T \theta_t \right) \right\},$$

где p_T определено из состояния z).

Построенные таким образом отображения Γ_s^I являются непрерывными. Действительно, Γ_{T+2}^I — постоянное отображение, множество $\Gamma_s^I(z)$ ($s = 1, \dots, T + 1$) представляет собой пересечение ограниченного множества $R_+^n \cap S$ с полупространством, определенным неравенством $p_s(x) \leq k \cdot \Pi(z)$. Очевидно, что множество $\Gamma_s^I(z)$ непрерывно зависит от коэффициентов приведенного неравенства, следовательно, отображение Γ_s^I ($s = 1, \dots, T + 1$) непрерывно.

С е р и я II. Отображения Γ_s^{II} определяются отображениями Γ_s^I следующим образом: множество $\Gamma_s^{II}(z)$ лежит в том же пространстве, что и E_T , и получается из $\Gamma_s^I(z)$ до-

бавлением недостающих координат со значениями соответствующих координат вектора z . Иначе говоря, $\Gamma_s^{\text{II}}(z)$ есть прямое произведение множества $\Gamma_s^{\text{I}}(z)$ на вектор \tilde{z} , где \tilde{z} получается из z вычеркиванием координат с номерами, соответствующими $\Gamma_s^{\text{II}}(z)$. Очевидно, что отображения Γ_s^{II} также непрерывны.

С е р и я III. Рассмотрим целевые функции потребителей и производителя $u_1, \dots, u_T, \pi, \Pi$. Образует с их помощью функции f_s ($s = 1, \dots, T + 2$), определенные на E_T , следующим образом: $f_s(z) = u_s(c_s)$ для $s = 1, \dots, T$, где c_s есть соответствующая часть вектора z ; $f_{T+1}(z) = \pi(x_T)$, где x_T есть соответствующая часть вектора z ; $f_{T+2}(z) = \Pi(z)$, где $\Pi(z)$ определена выше. Поскольку функции $u_1, \dots, u_T, \pi, \Pi$ непрерывны, то непрерывны также и функции f_s ($s = 1, \dots, T + 2$).

Положим

$$\Gamma_s^{\text{III}}(z) = \{z' \in \Gamma_s^{\text{II}}(z) \mid f_s(z') = \max_{z'' \in \Gamma_s^{\text{II}}(z)} f_s(z'')\},$$

$s = 1, 2, \dots, T + 2$. В силу предложения 17.1 отображения Γ_s^{III} полунепрерывны сверху.

Вернемся теперь к последовательности $(z(k))$ и ее пределу \hat{z} . Поскольку $z(k) \in E_T$, то, по определению состояния равновесия, $z(k) \in \Gamma_s^{\text{III}}(z(k))$ для всех k и всех s . В силу полунепрерывности сверху отображений Γ_s^{III} имеет место $\hat{z} \in \Gamma_s^{\text{III}}(\hat{z})$ для всех s . Последнее включение и означает, что соотношения (22.5) — (22.7) выполняются для предела \hat{z} . Таким образом, показано, что множество E_T замкнуто. Установим теперь ограниченность множества E_T . Значения координат произвольного вектора $z \in E_T$, соответствующие векторам x (π, T, t) и c (π, T, t), ограничены в силу ограниченности множества Ω_t . Предположим теперь, что существует последовательность $(z(k))$ такая, что $z(k) \in E_T, p_i^i(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Примем другую нормировку цен, а именно, пусть $\sum_{i,t} p^i(\pi, T, t) = 1$. При такой нормировке множество E_T является компактом, следовательно, из последовательности $(z(k))$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой $z \in E_T$.

Для предельного состояния равновесия \bar{z} при нормировке $\sum_{i,t} p^i(\pi, T, 1) = 1$, очевидно, будет иметь место $p(\pi, T, 1) = 0$, что, как отмечалось выше, невозможно. Следовательно, и при нормировке $\sum_i p^i(\pi, T, 1) = 1$ множество E_T является ограниченным. Обозначим через $E_{i,T}$ ($t \leq T$) проекцию множества E_T на подпространство с координатами, соответствующими номеру t , а именно,

$$E_{i,T} = \{z_t \mid z_t = (x(\pi, T, t), c(\pi, T, t), p(\pi, T, t)), z \in E_T\}.$$

Поскольку E_T — компакт, то $E_{i,T}$ — также компакт.

Докажем теперь справедливость включения $E_{i,T+1} \subset E_{i,T}$. Для этого возьмем произвольно $z \in E_{T+1}$. По определению, z удовлетворяет соотношениям (22.4) — (22.7), если в них T заменить на $T + 1$. Рассмотрим модель $M(p_T, T)$. Непосредственно проверяется, что часть вектора $z \in E_{T+1}$, относящаяся к моментам времени $1, 2, \dots, T$, удовлетворяет всем соотношениям, определяющим состояние равновесия модели $M(p_T, T)$. Следовательно, $E_{i,T+1} \subset E_{i,T}$. Это утверждение используется далее следующим образом. Поскольку $E_{i,T}$ ($t \leq T$) непусто, не содержит нуля и компактно, то множество $E_i^* = \bigcap_{T=t}^{\infty} E_{i,T}$ непусто и не со-

держит нуля для любого t . Построим искомое состояние равновесия $(\bar{x}_t, \bar{c}_t, \bar{p}_t)_{t=1}^{\infty}$ модели M_{∞} . Выберем произвольно $\bar{z}_1 = (\bar{x}_1, \bar{c}_1, \bar{p}_1) \in E_1^*$. По определению множества E_1^* для \bar{z}_1 найдется $\bar{z}_2 \in E_2^*$ такой, что (\bar{z}_1, \bar{z}_2) удовлетворяет соотношениям (22.1) — (22.3). По \bar{z}_2 находим точно также вектор $\bar{z}_3 \in E_3^*$ и т. д. Продолжая этот процесс, в результате получим последовательность $\bar{z} = (\bar{z}_t)_{t=1}^{\infty}$, удовлетворяющую определению состояния равновесия.

Теорема доказана.

4. Связь между равновесными, эффективными и U -оптимальными траекториями. В модели (\mathfrak{M}, U) были определены различные классы траекторий: эффективные траектории, U -оптимальные и, наконец, равновесные траектории. В этом пункте мы показываем, что при определенных весьма широких условиях классы равновесных и эф-

эффективных траекторий совпадают. А поскольку класс U -оптимальных траекторий является подклассом эффективных и ранее (§ 20) были приведены некоторые условия, при которых эффективные траектории оказываются U -оптимальными, то этот факт совпадения переносит результаты о соотношении эффективных и U -оптимальных траекторий на соотношение равновесных и U -оптимальных, а также помогает пролить свет на упоминавшуюся выше проблему об отыскании необходимых и достаточных условий для U -оптимальности траекторий.

Прежде чем сформулировать теоремы о совпадении множеств эффективных и равновесных траекторий, установим соответствие между эффективными и равновесными траекториями.

Рассмотрим модель M_∞ , заданную последовательностями $(Q_t, u_t, \theta_t)_{t=1}^\infty$. Пусть $(x_t, c_t, p_t)_{t=1}^\infty$ — состояние равновесия этой модели (равновесная траектория). По определению состояния равновесия, вектор c_t является решением задачи максимизации: найти $\max u_t(c)$ при условии $p_t(c) \leq \theta_t p_t(x_t + c)$, $c \geq 0$. Эту задачу можно свести к задаче на безусловный экстремум, введя множитель Лагранжа, который обозначим *) через $1/\lambda_t$. Соответствующая функция Лагранжа будет иметь вид $\lambda_t u_t(c) - p_t(c)$. Таким образом, рассматриваемому состоянию равновесия соответствует последовательность положительных чисел (λ_t) .

Заметим, что если взять другую последовательность (θ_t) распределения прибылей, то, естественно, будет другое состояние равновесия и соответственно другая последовательность (λ_t) . Таким образом, можно говорить также о соответствии между последовательностями (θ_t) и (λ_t) .

Траекторию, соответствующую состоянию равновесия (x_t, c_t, p_t) , относительно которой будет доказываться, что она эффективна, обозначим через $(x_t, \gamma_t)_{t=0}^\infty$, где (x_t) — та же самая последовательность, что и в состоянии равновесия, а $\gamma_t = \sum_{\tau=1}^t \lambda_\tau u_\tau(c_\tau)$. Эффективность траектории (x_t, γ_t) понимается в обычном смысле, т. е. не существует

*) Так как функция u возрастает, то множитель Лагранжа положителен, и потому $\lambda_t > 0$.

другой траектории (x', γ') , момента времени T и числа $\delta > 1$ таких, что $x'_0 = x_0$, $(x'_t, x'_{t+1} + c'_{t+1}) \in \Omega_t$, $\gamma'_t =$
 $= \sum_{\tau=1}^t \lambda_\tau u_\tau(c'_\tau)$ для всех t , и, наконец, $(x'_T, \gamma'_T) = \delta (x_T, \gamma_T)$.

Т е о р е м а 22.2. Пусть имеется модель M_∞ , заданная последовательностями $(\Omega_t, u_t, \theta_t)$. Пусть (x_t, c_t, p_t) — состояние равновесия этой модели. Тогда соответствующая ему траектория (x_t, γ_t) является эффективной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим модель (\mathfrak{M}, U') , отличающуюся от исходной модели (\mathfrak{M}, U) только тем, что вместо функций $U = (u_t)$ взяты функции $U' = (\lambda_t u_t)$, где (λ_t) — последовательность, соответствующая последовательности (θ_t) . Непосредственно из определения состояния равновесия следует, что последовательность p_t является характеристической (в смысле теоремы 20.2). Следовательно, как было показано в п. 5 § 11, траектория (x_t, γ_t) является эффективной.

Установим теперь обратное соответствие. А именно, пусть $\lambda = (\lambda_t)$ — произвольно взятая последовательность положительных чисел. Эта последовательность λ порождает из каждой допустимой траектории (x_t, c_t) модели

(\mathfrak{M}, U) траекторию (x_t, γ_t) , где $\gamma_t = \sum_{\tau=1}^t \lambda_\tau u_\tau(c_\tau)$.

Рассмотрим эффективную траекторию $(x_t, \bar{\gamma}_t)$, порожденную траекторией (x_t, \bar{c}_t) . Согласно теореме 11.4, траектория $(x_t, \bar{\gamma}_t)$ допускает характеристику (\bar{p}_t) . Справедлива

Т е о р е м а 22.3 Траектория $(x_t, \bar{c}_t, \bar{p}_t)$ определяет состояние равновесия модели $M_\infty = (\mathfrak{M}, U, \theta)$, где $\theta = (\theta_t)$ вычислена по формуле $\theta_t = \frac{\bar{p}_t(\bar{c}_t)}{\bar{p}_t(\bar{x}_t + \bar{c}_t)}$ для всех t .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства надо проверить выполнение условий (22.1) — (22.3). Соотношение (22.1) выполняется, поскольку траектория (x_t, \bar{c}_t) допустима по определению. Соотношение (22.2) также имеет место, так как оно непосредственно следует из определения характеристики. Поэтому остается показать лишь выполнение соотношения (22.3). Заметим что $u_t(\bar{c}_t) = \bar{p}_t(\bar{c}_t) = \max_{c \geq 0} (u_t(c) - \bar{p}_t(c))$. Далее по определению числа θ_t имеет место равенство $\bar{p}_t(\bar{c}_t) = \theta_t \bar{p}_t(\bar{x}_t + \bar{c}_t)$.

Следовательно, $u_t(\bar{c}_t) = \max u_t(c)$, где максимум берется по всем $c \geq 0$, удовлетворяющим бюджетному неравенству $\bar{p}_t(c) \leq \theta_t \bar{p}_t(x_t + \bar{c}_t)$. Последнее означает, что $(x_t, \bar{c}_t, \bar{p}_t)$ — состояние равновесия модели $(\mathfrak{M}, U, \theta)$, что и требовалось доказать.

В заключение сформулируем теорему, аналогичную теореме 20.3, которая выделяет в классе равновесных траекторий U -оптимальные. Условия этой теоремы, так же как условия теоремы 20.3, являются лишь достаточными. Более того доказательство по существу использует одну и ту же идею.

Т е о р е м а 22. 4. *Состояние равновесия $(x_t, \bar{c}_t, \bar{p}_t)$ модели $(\mathfrak{M}, U, \theta)$ порождает U -оптимальную траекторию (x_t, \bar{y}_t) , где $U = (\lambda_t u_t)_{t=1}^{\infty}$, если*

$$(a) \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_t > 0,$$

$$(b) \sum_{t=1}^{\infty} v_t = k > 0, \quad v_t = \bar{p}_t(x_t + \bar{c}_t) - \bar{p}_{t-1}(x_{t-1}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (б) теоремы говорит о том, что $\bar{p}_t(x_t + \bar{c}_t) \leq \bar{p}_0(x_0) + k = k'$ для всех t . Далее, поскольку $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_t > 0$, то найдутся последовательность (t_k) и $\varepsilon > 0$ такие, что $\theta_{t_k} > \varepsilon$ для всех k .

Поэтому $\bar{p}_t(x_t + \bar{c}_t) \leq k'(1 - \varepsilon)^{t - t_k}$ для всех $t \geq t_k$. Последнее неравенство означает, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}_t(x_t) = 0$. Следовательно, по теореме 20.3, траектория (x_t, \bar{y}_t) U -оптимальна, что и требовалось доказать.

§ 23. ИСТОРИЧЕСКИЕ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ КОММЕНТАРИИ

§ 2. Сублинейные функционалы (калибровочные и опорные функции) были введены в рассмотрение Минковским в связи с исследованиями по геометрической теории чисел. Важным шагом в развитии взглядов Минковского явилось установление Фенхелем изоморфизма полулинейного пространства выпуклых компактов и полулинейного пространства сублинейных функционалов. В работах Фенхеля и его последователей показано, что сублинейные функционалы являются удобным аппаратом для исследования выпуклых множеств.

K -опорные и нормальные множества применяются в теории функций комплексного переменного (в частности, при исследовании асимптотики роста целых функций). Связи между K -опорными множествами и суперлинейными функционалами, определенными на конусе K , а также между нормальными компактами и моно-

тонными сублинейными функционалами отмечены Рубиновым в работе [9]. В той же работе введено понятие нормальной оболочки и установлены результаты пп. 8—10.

§ 3. Изложение общих свойств точно-множественных отображений, не связанных со структурой выпуклого конуса, см. в монографиях Бержа [1], [2]. В указанных работах приводится достаточно полная теоретико-множественная и топологическая теория этих отображений. Заметим, что изучение топологически свойств точно-множественных отображений стимулировалось, в частности, потребностями теории игр, в которой систематически используется теорема Какутани. Доказательство этой теоремы изложено, например, в книге Никайдо [2]. Метрика Хаусдорфа введена в рассмотрение и изучена Хаусдорфом и Бляшке (см. по этому поводу Хадвигер [1], где, в частности, доказывается теорема выбора Бляшке). Связь между метрикой Хаусдорфа и равномерной нормой (предложение 3.9) указана, например, в работе Хермандера [1]. Представляет интерес вопрос о дифференцируемости точно-множественных отображений (определение см. в п. 4 § 9). Этот вопрос изучался Тюриным [1].

§ 4. Исторически сложилось, что сначала суперлинейные отображения изучались неявно, в форме моделей экономической динамики, точнее говоря, модели Неймана — Гейла. Как самостоятельный объект исследования, они появились в работах Рокафеллара [1], [2] и Рубинова [2], [3], [5]. В этих работах, в частности, определены и исследованы двойственные отображения. Рокафеллар рассматривал лишь нормальные отображения из $A (R_+^n, R_+^m)$. В работе Рубинова [7] теория двойственности развита для отображений, определенных на конусах в локально выпуклых пространствах. Наше изложение следует, в основном, этой работе. Идеи выпуклого анализа играют при исследовании двойственности суперлинейных отображений решающую роль. Это исследование можно по-видимому провести непосредственно на языке выпуклого анализа с помощью предложенного Рокафелларом [3] понятия бифункции. Однако специфика, вызываемая экономическими приложениями (особая роль отношения порядка и, в частности, положительных функционалов), делает более удобным аппарат суперлинейных и сублинейных функционалов, используемый в этой книге, или родственный аппарат выпукло-вогнутых положительно однородных функций, применяемый Рокафелларом [1]. (Эти функции рассматривались в предложении 4.20.)

Для исследования выпуклых экстремальных задач, где положительность уже не играет решающей роли, весьма удобным оказывается понятие сопряженной бифункции (Рокафеллар [3]), носящее глобальный характер, или введенное Б. Н. Пшеничным [1] понятие сопряженного отображения, носящее локальный характер.

Мы совершенно не касались весьма интересных результатов Рокафеллара [1] — [4], относящихся к «выпуклой» алгебре отображений.

§ 5. Модель Неймана была введена в рассмотрение Нейманом в работе [1], опубликованной в 1937 г. Гейл [2] рассмотрел обобщение модели Неймана, которое впоследствии стало называться моделью Неймана — Гейла. Экономическая интерпретация модели

Неймана — Гейла приведена в тексте. В работах Макарова [2], [4], [5], [6] показано, что исследование многих важных задач, возникающих в экономике, сводится к изучению этой модели (среди этих задач отметим, например, динамические задачи линейного программирования и теорию моделей стационарной экономики, учитывающих потребление). Теорема о канонической форме принадлежит Макарову.

Отметим, что эта теорема связывает модели экономической динамики, рассматриваемые в настоящей книге, с широким классом конкретных экономико-математических моделей, описываемых с помощью линейного и, более того, математического программирования. Изучение этих моделей начато по существу в известной книге Канторовича [1]. Им посвящена обширная литература, из которой отметим лишь монографию Канторовича [2].

В книге не излагаются результаты, относящиеся к моделям Леонтьева, Неймана — Леонтьева, а также к многочисленным моделям леонтьевского типа. Этим моделям посвящена обширная литература (см., например, Гейл [2], [3], Моришима [2], Ланкастер [1], Карлин [1], Никайдо [2]). Исследование этих моделей удобнее всего проводить с помощью аппарата положительных квадратных матриц. Указанный аппарат позволяет в леонтьевском случае уточнить и усилить многие результаты, относящиеся к модели Неймана.

§ 6. Определение неймановского состояния равновесия в модели Неймана Z дано Нейманом в работе [1]. Там же доказано существование состояния равновесия при дополнительном условии $x^i + y^i > 0$ для любого $(x, y) \in Z$, $(x, y) \neq 0$.

Существование обобщенного неймановского состояния равновесия в модели Неймана — Гейла доказано Гейлом [2]. Контрпример 3 принадлежит Макарову. Аналогичный контрпример приведен Мовшвичем [1] и Хюльсманом и Штейнметцем [1]. Теорема 6.1 принадлежит Макарову и опубликована в статье Макарова и Рубинова [1]. Определение состояния равновесия и темпа роста в модели Неймана дано в работе Кемени, Моргенштерна и Томпсона [1]. Там же решен вопрос о числе темпов роста для модели Неймана (см. также статьи Томпсона [1] и Майстровского [1]). Расположение состояний равновесия с различными темпами роста в этой модели выяснено Макаровым [1]. Для модели Неймана — Гейла аналогичные результаты получены Макаровым [3] в предположении замкнутости проекций конуса Z . Теорема 6.2, освобожденная от последнего предположения, доказана впервые в работе авторов (см. Макаров и Рубинов [1]). Конструкция, использованная в ее доказательстве, принадлежит Макарову [3]. Как уже было отмечено в § 6, Мовшвич [1] доказал теорему об «ε-равновесии». Интересный подход к темпам роста предложен Рокафелларом [4]. Предложение 6.5 об обобщенных темпах роста содержится в статье Макарова и Рубинова [1].

Экономический темп роста введен Гейлом в работе [2]. Там же приводятся простые достаточные условия совпадения технологического и экономического темпов роста.

В этой книге мы совершенно не касались вопроса о вычислении темпов роста. Вычислительные методы для разыскания темпов роста в модели Неймана приведены, например, в работах Хамбургера,

Томпсона и Вайля [1] и Шмырева [1]. Отметим еще, что понятие темпа роста оказывается полезным при исследовании игры двух моделей (см. например, Красс [2]).

§ 7. Результаты этого параграфа принадлежат Рубинову и опубликованы в работе Макарова и Рубинова [1] (см. также Рубинов [6]).

Отметим, что спектральные свойства отображения $a \in A_n$ изучались Рокафелларом в [1]. Он рассматривал, однако, лишь случай, когда a имеет телесное собственное множество. Особенно подробно им исследована ситуация, когда одному из собственных чисел отвечают телесный собственный компакт отображения a и (R_+^n) -устойчивое собственное множество отображения $(a')^{-1}$.

Собственные множества отображения, обратного суперлинейному, рассматривались Швейдель [1]. Там же выяснены некоторые топологические свойства совокупности (R_+^n) -устойчивых множеств. По поводу непрерывности суперлинейного отображения и обратно к нему см. Красс [5], Швейдель [1].

§ 8. Общая технологическая модель введена в рассмотрение Рубиновым [4]. Ему же принадлежит результаты § 8.

Понятие оптимальной (эффективной) траектории развивалось постепенно. Можно упомянуть здесь работы Раднера [1], Рейдера [1], Макарова [2], Фуруйя и Инада [1]. Это понятие тесно связано с так называемыми экстремальными состояниями (см. Акилов, Канторович, Рубинштейн [1]). Лемма 8.1 для случая правильной модели доказана Макаровым [4]. Подмодели в модели Неймана — Гейла рассматривал Гейл [2] (его определение отлично от нашего). Подмодели этой модели изучались Крассом [3], [4].

§ 9. Теоремы о характеристике для различных частных классов технологических моделей доказаны Купмансом [1], Малинво [1], [2], Мак-Кензи [1], Тюриным [1], Макаровым [8], [10]. Теоремы о характеристике, приведенные в § 9, получены Рубиновым в [8]. Там же определена двойственная модель. Определение согласованных траекторий и результаты п. 6 принадлежат Рубинову.

§ 10. Модель типа Неймана — Гейла определена Макаровым [2]. Модель, функционирующая в непрерывном времени, определена им же в работе [8]. Леммы 10.1, 10.2 и теорема 10.2 принадлежат Макарову. Теорема 10.3 принадлежит Рубинову и является усилением теоремы Макарова [8]; см. также Рокафеллар [4]. Дифференциальные включения изучались Болтянским [1].

§ 11. Обобщенную технологическую модель определил Тюрин [1]. Результаты § 11 принадлежат Рубинову. Теорема 11.2 является усилением теоремы Тюрин [1].

§ 12. Результаты этого параграфа принадлежат Рубинову [7], [8], [9].

§ 13. Впервые магистральный характер поведения оптимальных траекторий был в простейших случаях замечен Дорфманом, Самуэльсоном и Солоу [1]. Для модели Неймана — Гейла теорема о магистрали в слабой форме доказана впервые Раднером [1] (в предположении, что существует строгое состояние равновесия). В этой же работе доказывается лемма 13.1'. Неймановская грань была оп-

ределена Мак-Кензи [2] для так называемой «модели леонтьевского типа». Там же приводится лемма 13.1. Понятие траектории, имеющей средний темп роста, введено Макаровым [4]. Теоремы о магистрали в слабой форме для конечных оптимальных траекторий были доказаны при различных предположениях, наложенных на модель Мак-Кензи [1], [2], [3], Моришимой [1], [2], Макаровым [2], [4], Романовским [1], [2], [3], Мовшовичем [1].

Асимптотическое поведение оптимальных бесконечных траекторий впервые рассматривал Макаров в работе [4]. Там, в частности, приведена теорема 13.1. Остальные результаты пп. 2, 3 § 13 приведены, по-видимому, впервые в работе Макарова и Рубинова [1]. Обзор теорем о магистрали в слабой форме приведен в статье Мовшовича и Питтеля [1]. Там же указывается на связь модели Неймана — Гейла с марковскими процессами принятия решений и динамическим программированием. Эта связь подробно изучена Романовским [1], [2], [3].

§ 14. Теорему о магистрали в сильной форме впервые доказал Никайдо [1] (см. теорему 14.2). При различных предположениях, наложенных на модель, эту теорему получили Моришима [1], [2], Драндакис [1], Тцукуи [1], Макаров [4], Романовский [2] и др.

Подробное изложение теорем о магистрали для некоторых специальных классов моделей имеется в монографиях Моришимы [2] и Никайдо [2].

Теорема 14.1 приведена впервые в работе Макарова и Рубинова [1]. Заметим, однако, что связь между явлением сильной магистральности и сходимости последовательности итераций $a^t(x_0)$ к собственному множеству установил впервые Макаров [4]. Доказательство теоремы 14.2 принадлежит Рубинову.

§ 15. Определение базисной траектории введено Макаровым в работе [4]. Там же содержатся все результаты § 15, за исключением предложения 15.1. Это предложение принадлежит Рубинову.

Недавно Жафяров [2] выделил еще один класс траекторий, для которых имеет место теорема о магистрали в сильнейшей форме. Этот класс состоит из траекторий, допускающих характеристику, обладающую некоторыми специальными свойствами.

§ 16. Результаты этого параграфа принадлежат Рубинову. Асимптотике оптимальных траекторий в моделях с переменной технологией посвящены также работы Рубинова [2], Красса [1], Шапиева [1], Рубинова и Шапиева [1]. Подход к исследованию траекторий модели Неймана — Гейла, намеченный в п. 2, развит в статье Жафярова [1].

§ 17. Бескоалиционная вогнутая игра n лиц в нормальной форме введена Нейманом и Моргенштерном [1]. Определение рассмотренного состояния равновесия и доказательство его существования принадлежит Нэшу [1], [2]. Описанная в § 17 модификация игры n лиц, при которой множества стратегий игроков зависят от самих стратегий, дана Макаровым.

Теория игр n лиц применяется для исследования различных задач математической экономики. Отметим приложения этой теории к модели Эрроу — Дебре (см. следующий параграф), а также к модели производства Вальда (см. Зуховицкий, Поляк, Примак [1]; по поводу модели Вальда см. Вальд [1], Кун [1]; динамический вариант

модели Вальда рассмотрен в упомянутой работе Зуховицкого, Поляка и Примака).

§ 18. Модель Эрроу — Дебре впервые опубликована в работе Эрроу и Дебре [1] (см. также книгу Дебре [1]). Близкие по форме модели были определены и изучены Мак-Кензи [1] и Гейлом [1]. Идея о сведении модели Эрроу — Дебре к игре n лиц принадлежит Волконскому и была реализована Макаровым в работе [11]. Ауманну [1] принадлежит обобщение модели Эрроу — Дебре на случай континуума потребителей (при этом удается отказаться от предположения о вогнутости функции полезности). Изложение и некоторое обобщение результатов Ауманна содержатся в работе Мовшовича [2].

§ 19. Связь между оптимальностью и равновесием установлена в первоначальной работе Эрроу и Дебре [1]. Вариант доказательства теоремы 19.1 принадлежит Макарову [11].

§ 20. Первоначальная формулировка задачи о максимизации суммарной полезности на бесконечном временном интервале дана Рамсеем [1] еще в 1928 году. Примеры 2 и 3 несуществования оптимальных траекторий принадлежат Гейлу [4]. Теорема 20.3 содержится в работе Макарова [10].

Однопродуктовая модель исследовалась многими авторами.

U -оптимальные траектории в этой модели изучались Купмансом [1], [2], [3], Билсом и Купмансом [1], Гейлом [4], [5], Гейлом и Сазерлендом [1], Инагаки [1], [2], Сазерлендом [1] и др. Некоторые задачи, возникающие в этой модели, рассмотрены Канторовичем и Горьковым [1], а также Горьковым [1]. Функциональные (и, в частности, дифференциальные) уравнения, связанные с исследованием моделей экономической динамики, приведены в работе Канторовича и Макарова [1].

§ 21. Теорема 21.1 принадлежит Гейлу [4]. Пример несуществования U -оптимальной стационарной траектории дан Макаровым в [10]. Теорема 21.2 принадлежит Макарову [7], [12]. Аналогичная теорема, доказанная тем же методом при несколько других условиях, дана Купмансом [3].

§ 22. Результаты этого параграфа принадлежат Макарову.

- Акилов Г. П., Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш.*
 1. Экстремальные состояния и экстремальные управления, Вестник ЛГУ 7, вып. 2 (1967).
- Ауманн (R. J. Aumann)*
 1. Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders, Econometrica 34, 1 (1966).
- Беккенбах Э., Беллман Р.*
 1. Неравенства, «Мир», 1965.
- Берж (C. Berge)*
 1. Общая теория игр нескольких лиц, Физматгиз, 1961.
 2. Topological spaces, including a treatment of multi-valued functions, vector spaces and convexity, Edinburg — London, 1963.
- Билс и Купманс (R. Beals and T. C. Koopmans)*
 1. Maximizing stationary utility in a constant technology, SIAM J. Appl. Math. 17, 5 (1969), 1001—1015.
- Болтянский В. Г.*
 1. Математические методы оптимального управления, «Наука», 1969.
- Бурбаки Н.*
 1. Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959.
- Вальд (A. Wald)*
 1. Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie, Zeitschrift für Nationalökonomie 7, 5 (1936), 637—670.
- Гантмахер Ф. Р.*
 1. Теория матриц, «Наука», 1967.
- Гейл (D. Gale)*
 1. The law of supply and demand, Mathematica Scandinavica 3 (1955), 155—169.
 2. Замкнутая линейная модель производства, Сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы», ИЛ, 1959.
 3. Теория линейных экономических моделей, ИЛ, 1963.
 4. Optimal programs for a multi-sector economy with an infinite time horizon, Technical report No. 1, prepared under contract 562 (15), Department of mathematics Brown university, 1965.
 5. A mathematical theory of Economic Development, Bull. Am. Math. Soc. 74, 2 (1968), 207—223.
- Гейл, Сазерленд (D. Gale, W. Satherland)*
 1. Analysis of one good model of economic development, Berkeley, 1967.
- Гольштейн Е. Г.*
 1. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения, «Наука», 1971.

Горьков Л. И.

1. Однопродуктовая экономическая модель и анализ экономической эффективности капитальных вложений, Сб. «Математический анализ расширенного воспроизводства», Изд. АН СССР, М., 1962.

Дебре (G. Debreu)

1. Theory of value, New York, Wiley, 17 (1959).

Дорфман, Самуэльсон, Солоу (R. Dorfman, P. A. Samuelson, R. M. Solow)

1. Linear programming and economic analysis, New York, McGraw Hill, 1958.

Драндакис (E. M. Drandakis)

1. On efficient accumulation paths in the closed production model, *Econometrica* 34, 2 (1966), 331—346.

Жафяров А. Ж.

1. Теорема о магистрали в одной модели, *Оптимизация*, вып. 2 (19), Новосибирск, «Наука», 1971.
2. Теорема о магистрали в сильнейшей форме, *Оптимизация*, вып. 7 (24), Новосибирск, «Наука», 1972.

Зуховицкий С. И., Поляк Р. А., Примак М. Е.

1. Об одном методе отыскания точки равновесия вогнутой игры n лиц и модели производства Вальда, *Труды второй школы по математическому программированию*, вып. 1, М., 1969, 36—55.

Инагаки (M. Inagaki)

1. Utility Maximization over infinite time: a general existence theorem, Netherlands economic institute, Division of Balanced International Growth, Publ. No. 34/66, February, 1966.
2. Optimal growth under technological progress, Netherlands economic institute, 1966.

Инада (K. Inada)

1. Some structural characteristics of turnpike theorems, *Rev. Econ. Stud.* 31, 1 (1964).

Иоффе А. Д. и Тихомиров В. М.

1. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи, *УМН* 23, 6 (1968), 51—116.

Какутани (S. Kakutani)

1. A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Math. J.* 8 (1941), 451—458.

Канторович Л. В.

1. Математические методы организации и планирования производства, Изд. ЛГУ, Л., 1939.
2. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, «Наука», 1959.

Канторович Л. В. и Акилов Г. П.

1. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

Канторович Л. В. и Горьков Л. И.

1. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели, *ДАН СССР* 129, 4 (1959), 732—735.

Канторович Л. В. и Макаров В. Л.

1. Дифференциальные и функциональные уравнения, возникающие в моделях экономической динамики, Сиб. матем. ж. 11, 5 (1970), 1046—1059.

Канторович Л. В. и Рубинштейн Г. Ш.

1. Об одном пространстве вполне аддитивных функций, Вестник ЛГУ 7, вып. 2 (1958), 52—59.

Карлин С.

1. Математические методы в теории игр, программировании и экономике, «Мир», 1964.

Кастайн (С. Castaing)

1. Sur les equations differentielles multivoques. C. R. Acad. Sci. Paris 263 (1966), 63—66.

Кемени, Моргенштерн, Томпсон (J. Kemeny, O. Morgenstern, G. Tompson)

1. A generalization of the von Neumann model of an expanding economy, Econometrica 24, 2 (1956), 115—135.

Красс И. А.

1. Теоремы о магистрали для модели Гейла с нагрузкой, Оптимальное планирование, вып. 9, Новосибирск, «Наука», 1967.
2. Об игре глобальных экономических моделей, Сб. «Управляющие системы», 2, Новосибирск, 1969.
3. Некоторые вопросы теории модели Неймана, Сб. «Исследования по кибернетике», М., «Сов. радио», 1970.
4. Асимптотика растущих траекторий в модели Неймана — Гейла, ДАН СССР 196, 1 (1971), 38—39.
5. О непрерывности технологического отображения в модели Неймана — Гейла, ДАН СССР 197, 6 (1971), 1255—1257.

Кун Г. У.

1. Об одной теореме Вальда, В сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы», ИЛ, 1959, 363—371.

Купманс (Т. С. Koopmans)

1. Analysis of production as an efficient combination of activities, Chapter 3 in «Activity analysis of production and allocation», New York, Wiley, 1951.
2. On the concept of optimal economic growth, Pontificae Acad. Sci. Scripta Varia, Amsterdam (1965), 225—285.
3. A model of a continuing state with scarce capital, Материалы Всесоюзного симпозиума по моделированию народного хозяйства, Новосибирск, 1970.

Ланкастер К.

1. Математическая экономика, М., «Сов. радио», 1972.

Майстровский Г. Д.

1. О состоянии равновесия в одной модели замкнутой экономики с потреблением, Оптимизация, вып. 2 (19), Новосибирск, «Наука», 1971.

Макаров В. Л.

1. Об условии равновесия в модели Неймана, Сиб. матем. ж. 3, 3 (1962).
2. Асимптотика решений линейных динамических моделей с дискретным временем, ДАН СССР 165, 4 (1965), 767—769.

3. Состояния равновесия замкнутой линейной модели расширяющейся экономики, Экономика и матем. методы 1, 5 (1965), 736—738.
4. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики, Сиб. матем. ж. 7, 4 (1966), 832—853.
5. Оптимальное функционирование линейных моделей экономики на бесконечном интервале, Оптимальное планирование, вып. 5, Новосибирск, «Наука», 1966.
6. Линейные динамические модели производства, Оптимальное планирование, вып. 5, Новосибирск, «Наука», 1966.
7. Состояние равновесного сбалансированного роста в модели Неймана с функцией полезности, Оптимальное планирование, вып. 8, Новосибирск, «Наука», 1967.
8. Характеристика решений задачи непрерывного линейного и выпуклого программирования, ДАН СССР 176, 5 (1967), 1007—1008.
9. Математические модели экономической динамики, Автореферат диссертации, Новосибирск, 1968.
10. Модели оптимального роста экономики, Экономика и матем. методы 5, 4 (1969), 571—581.
11. О модели конкурентного экономического равновесия, Кибернетика, вып. 5, 1969, 136—141.
12. Существование магистрали при дисконте, большем единицы, Оптимизация, вып. 2 (19), Новосибирск, «Наука», 1971.

Макаров В. Л. и Рубинов А. М.

1. Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики, УМН 25, 5 (1970), 126—169.

Мак-Кензи (L. W. McKenzie)

1. On the existence of general equilibrium for a competitive market, Econometrica 27 (1959), 54—71.
2. The turnpike theorem of Morishima, Rev. Econ. Stud. 30, 3 (1963), 169—177.
3. Turnpike theorems for a generalized Leontief model, Econometrica 31, 1—2 (1963), 165—180.
4. Maximal Paths in the von Neumann model, Symposium of International Economic Association, Cambridge, England, 1963.

Малинво (E. Malinvoid)

1. Capital accumulation and efficient allocation of resources, Econometrica 21 (1953), 233—268.
2. Efficient capital accumulation: a corrigendum, Econometrica 30 (1962), 570—573.

Мовшович С. М.

1. Теорема о магистрали в моделях Неймана — Гейла (слабая форма), Экономика и матем. методы 5, 6 (1939), 877—889.
2. Модели экономического равновесия, Труды первой школы по математическому программированию, вып. 1, М., 1969, 147—176.

Мовшович С. М. и Питтель Б. Г.

1. Магистральные свойства моделей замкнутой экономики и динамических процессов принятия решений, Экономика и матем. методы 6, 2 (1970), 297—310.

Моришима (M. Morishima)

1. Proof of a turnpike theorem: the «no-joint production» case, *Rev. Econ. Stud.* 28, 5 (1961), 89—97.
2. Равновесие, устойчивость, рост, «Наука», 1972.

Натансон И. П.

1. Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1957.

Дж. фон Нейман (J. von Neumann)

1. Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, *Ergebnisse eines Math. Kolloquiums*, No. 8, Vienna, 1937.

Дж. фон Нейман, Моргенштерн О.

1. Теория игр и экономическое поведение, «Наука», 1970.

Никайдо (H. Nikaido)

1. Persistence of continual growth near the von Neumann ray: a strong version of the Radner turnpike theorem, *Econometrica* 32, 1—2 (1964), 151—163.
2. Выпуклые структуры и математическая экономика, «Мир», 1972.

Наш (J. F. Nash)

1. Equilibrium points in N -person games, *Proc. Nat. Acad. Sc. USA* 36 (1950), 48—49.
2. Бескоалиционные игры, Сб. «Матричные игры», Физматгиз, 1961.

Пек Дж., Далмидж А.

1. Игры на компактном множестве, Сб. «Бесконечные антагонистические игры», Физматгиз, 1963.

Пинскер А. Г.

1. Пространство выпуклых множеств локально выпуклого пространства, Сб. «Некоторые классы полуупорядоченных пространств», Ленинград, Изд. ЛГУ, 1966.

Пшеничный В. Н.

1. Выпуклые многозначные отображения и им сопряженные, *Кибернетика*, 3 (1972), 94—102.

Раднер (R. Radner)

1. Paths of economic growth that are optimal with regard only to final states; a turnpike theorem, *Rew. Econ. Stud.*, 28, (1961), 98—104.

Райков Д. А.

1. Векторные пространства, Физматгиз, М., 1962.

Рамсей (F. Ramsey)

1. A mathematical theory of saving, *Econ. J.* 38 (1928), 543—559.

Рейдер (T. Rader)

1. On intertemporal efficiency, *Metroeconomica* 17, 3 (1965), 152—170.

Рокафеллар (R. T. Rockafellar)

1. Monotone processes of convex and concave type, *Memoirs Amer. Math. Soc.* 77 (1967).
2. A monotone convex analogue of linear algebra, *Proc. Colloquium on Convexity*, Copenhagen, 1967.

3. Выпуклый анализ, «Мир», 1973.
4. Convex algebra and duality in dynamic models of production, Warsaw, 1972.

Романовский И. В.

1. Асимптотическое поведение процессов динамического программирования с непрерывным множеством состояний, ДАН СССР 159, 6 (1964), 1224—1227.
2. Асимптотическое поведение дискретного детерминированного процесса с непрерывным множеством состояний, Оптимальное планирование, вып. 8, Новосибирск, «Наука», 1967.
3. Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом динамического программирования, Кибернетика, вып. 2, 1967, 71—83.

Рубинов А. М.

1. Об одной математической модели производства, ДАН СССР 174, 5 (1967), 754—756.
2. Асимптотическое поведение оптимальных траекторий в одной математической модели производства, Оптимальное планирование, вып. 9, Новосибирск, «Наука», 1967.
3. Двойственные модели производства, ДАН СССР 180, 4 (1968), 795—798.
4. Эффективные траектории динамической модели производства, ДАН СССР 184, 6 (1969), 1294—1297.
5. Динамические модели производства с переменной технологией. Сб. «Труды первой зимней школы по математическому программированию», вып. 3, М., 1969.
6. Бесконечномерные модели производства, Сиб. матем. ж. 10, 6 (1969), 1383—1394.
7. Точечно-множественные отображения, определенные на конусе, Оптимальное планирование, вып. 14, Новосибирск, «Наука», 1969.
8. Характеристика некоторых классов траекторий динамической модели производства, Оптимальное планирование, вып. 14, Новосибирск, «Наука», 1969.
9. Сублинейные функционалы, определенные на конусе, Сиб. матем. ж. 11, 2 (1970).

Рубинов А. М. и Шапиев К. Ш.

1. Об одном обобщении теоремы о магистрали в сильной форме, Оптимальное планирование, вып. 10, Новосибирск, «Наука», 1968.

Рубинштейн Г. Ш.

1. Теоремы делимости выпуклых множеств, Сиб. матем. ж. 5 (1964), 1098—1124.
2. Несколько примеров двойственных экстремальных задач, Сб. «Математическое программирование», «Наука», 1966.

Сазерленд (W. R. Satherland)

1. On optimal development programs when future utility is discounted, ORC-18, Operations Research Center, Univ. of California, Berkeley, 1966.

Самуэльсон П. А.

1. Экономика, «Прогресс», 1965.

Томпсон Дж.

1. О решении одной задачи теории игр, В сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы», ИЛ, 1959.

Тцукуи (J. Tsukui)

1. Turnpike theorem in a generalised dynamic Input-Output system, *Econometrica* 34, 2 (1966), 396—407.

Тюрин Ю. Н.

1. Математическая формулировка упрощенной модели производственного планирования, *Экономика и матем. методы* 1, 3 (1965), 391—410.

Фенхель (W. Fenchel)

1. Convex cones, sets and functions, Lecture notes, Dept. of Math. Princeton Univ., 1953.

Фуруйя и Инада (H. Furuya and K. Inada)

1. Balanced growth and intertemporal efficiency in capital accumulation, *International Econ. Rev.* 3 (1962), 97—107.

Хадвицер Г.

1. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, «Наука», 1966.

Хамбургер, Томпсон, Вайль (M. J. Hamburger, G. L. Thompson, R. L. Weil)

1. Computation of expansion rates for the generalized von Neumann model of an expanding economy, *Econometrica* 35, 3—4 (1967), 542—547.

Хермандер (L. Hormander)

1. Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans une espace localement convexe, *Arkiv Math.* 3, 2 (1954), 181—186.

Хюльсман и Штейнметц (J. Hülsmann and V. Steinmetz)

1. A note of the nonexistence of optimal price vectors in the general balanced-growth model of Gale, *Econometrica* 40, 2 (1972), 387—389.

Шапцев К. Ш.

1. Об одном обобщении теоремы о магистрали Раднера, Оптимальное планирование, вып. 10, Новосибирск, «Наука», 1968.

Швейдель А. П.

1. О некоторых свойствах точечно-множественных отображений, Оптимизация, вып. 4 (21), Новосибирск, «Наука», 1971.

Шмырев В. И.

1. Метод решения модели Неймана, Оптимальное планирование, вып. 11, Новосибирск, «Наука», 1968.

Эрроу, Дебре (K. J. Arrow, G. Debreu)

1. Existence of an equilibrium of the competitive economy, *Econometrica* 22 (1954), 265—290.

Валерий Леонидович Макаров
Александр Моисеевич Рубинов,

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ
И РАВНОВЕСИЯ**

(Серия: «Экономико-математическая
библиотека»)

М., 1973 г., 336 стр. с илл.

Редактор *Н. П. Рябенская.*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*
Корректор *М. Л. Медведская.*

Сдано в набор 23/VII 1973 г.

Подписано к печати 21/XI-1973 г.

Бумага 84×108^{1/2} Физ. печ. л. 10,5.

Условн. печ. л. 17,64. Уч.-изд. л. 18,58.

Тираж 7500 экз. Т-16964.

Цена книги 1 р. 18 к. Зак. № 2754

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической
литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»

Москва, Шубинский пер., 10.

Цена 1 р. 18 к.